BLOCO 3

Documentos de Apoio

Densidade e Impulsão

Forças de Pressão e Pressões

O Equilíbrio dos Corpos

Ângulos

Triângulos

Translações / Vectores

BLOCO 3 – Programa

Conteúdos

Ângulos

- ângulos verticalmente opostos
- ângulos complementares e ângulos suplementares
- ângulos de lados paralelos

Triângulos

- ângulos internos ângulos externos
- soma dos ângulos internos de um triângulo
- relação entre lados e ângulos de um triângulo

Translações / Vectores

- adição de vectores

Equilíbrio dos corpos

- centro de gravidade de um corpo
- equilíbrio de corpos suspensos
    - equilíbrio estável
    - equilíbrio instável
    - equilíbrio indiferente
- equilíbrio de corpos apoiados

Densidade e impulsão

- Princípio de Arquimedes

Forças de Pressão e Pressões

Bibliografia

Durão, Elsa Gouveia & Baldaque, Mª. Margarida (1998): MAT 7 - Matemática. Texto Editora

Maciel, Noémia & Miranda, Ana (1999): Eu e a Física – Físico-Químicas, 9.º ano escolaridade. Porto Editora

20
FORÇAS E MOVIMENTO

20. DENSIDADE E IMPULSÃO

$d = \frac{m}{V}$

- m: kg (quilograma)
- V: m³ (metro cúbico)
- d: kg/m³ (quilograma/metro cúbico)

Densidade absoluta

Aprendeste no 8.° ano que a **densidade absoluta** ou **massa volúmica de uma substância** é uma grandeza física que se define como sendo igual à massa por unidade de volume dessa substância, à temperatura considerada.

$$\text{Densidade absoluta} = \frac{\text{Massa}}{\text{Volume}}$$

$$d = \frac{m}{V}$$

A densidade de uma substância (a uma dada temperatura), esteja ela no estado sólido, líquido ou gasoso, é uma propriedade característica dessa substância.

Porque será necessário referir a temperatura?

Como sabes, a massa é uma propriedade das substâncias, cujo valor se mantém constante a qualquer temperatura. O mesmo já não acontece com o volume; este varia com o aumento ou diminuição da temperatura e, por consequência, a densidade também varia com esta.

Que significará dizer que a densidade da glicerina é 1,3 g/cm³, à temperatura de 20 °C?

Significa que 1 cm³ de glicerina tem de massa 1,3 g, a essa temperatura.

"A densidade de uma substância é uma propriedade física característica dessa substância, a uma dada temperatura."

	Substâncias	Densidades (g/cm³)
SÓLIDAS	Gelo	0,9
	Alumínio	2,7
	Titânio	4,5
	Ferro	7,9
	Chumbo	11,4
LÍQUIDAS	Álcool etílico	0,79
	Parafina líquida	0,80
	Água	1,0
	Glicerina	1,3
	Mercúrio	13,6
GASOSAS	Hidrogénio	0,00009
	Hélio	0,00018
	Ar (mistura)	0,0013
	Oxigénio	0,0014

A tabela ao lado apresenta a densidade de alguns sólidos e líquidos, à temperatura de 20 °C (excepto o gelo, cuja densidade se mede a 0 °C) e de alguns gases à pressão de 1 atm e à temperatura de 0 °C.

Pela observação da tabela, poderás mais uma vez concluir que cada substância apresenta a sua própria densidade, pois, massas iguais de substâncias diferentes ocupam volumes diferentes, uma vez que as suas partículas ou estão mais "apertadas" e/ou a sua massa é maior (lembra-te que as partículas são diferentes de substância para substância).

78

20

FORÇAS E MOVIMENTO

Impulsão

- Como se explica que sendo um navio feito de materiais tão densos, como ferro e aço, flutue na água?
- Como se explica que um submarino consiga imergir?
- Como se explica a subida de um balão no ar?

Imergir – mergulhar.
Emergir – elevar-se, vir à superfície.

Para podermos dar resposta a estas questões e a tantas outras que se poderiam pôr, vamos estudar um pouco de **Estática dos fluidos.**

Vimos já que a Estática estuda sistemas em equilíbrio; a Estática dos fluidos vai estudar o equilíbrio nos fluidos. Mas **o que são fluidos**?

Os **fluidos** são substâncias que podem fluir, escoar-se com maior ou menor facilidade, ou porque as suas partículas não ocupam posições fixas, podendo deslizar umas sobre as outras com pequeno atrito, como é o caso dos **líquidos**, ou porque as suas partículas estão muito afastadas umas das outras, têm grande liberdade de movimento e deslocam-se rapidamente em todo o espaço disponível, como é o caso dos **gases.**

« Os fluidos são os líquidos e os gases, isto é, as substâncias que podem fluir. »

Os fluidos não reagem a qualquer força que implique variação de forma, como acontece com os sólidos; os fluidos adaptam-se sempre à forma dos vasos que os contêm. Como as propriedades dos líquidos em equilíbrio se aplicam em grande parte também aos gases, daí se preferir falar de fluidos.

O *cocktail* líquido permite observar materiais que flutuam em diferentes líquidos e outros que se afundam.

Tentemos agora explicar **por que é que certos corpos flutuam e outros se afundam em diferentes líquidos ou gases.**

Consideremos três cubos do mesmo tamanho que são colocados em três recipientes com água.

A figura pretende mostrar o comportamento dos cubos em relação à água. Assim:

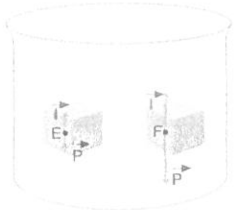
- no 1.° recipiente, o cubo A flutua, praticamente emerso;
- no 2.° recipiente, o cubo B flutua, praticamente imerso na água;
- no 3.° recipiente, o cubo C afunda-se.

Como poderemos explicar estes três comportamentos diferentes? Naturalmente que os cubos têm que ter algo de diferente e, neste caso, se os volumes são iguais, é porque eles são feitos de materiais diferentes. Por exemplo, o cubo A poderá ser de esferovite, o cubo B de madeira e o cubo C de cobre.

Pelo facto de serem de materiais diferentes, a sua densidade vai ser diferente, o que faz com que o seu peso também seja diferente.

79

20
FORÇAS E MOVIMENTO



A impulsão é uma força que se opõe ao peso de um corpo.

O comportamento dos cubos perante a água vai depender das forças que sobre eles actuem.

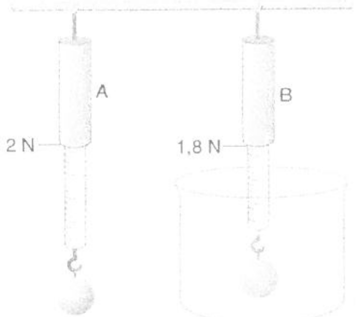
Efectivamente qualquer corpo tem peso, devido à acção gravítica da Terra, e como tal tem tendência a cair. Assim, os três cubos, seja qual for o material de que são feitos, deveriam ir todos ao fundo. Se na realidade não vão, é porque há alguma força que os impede, isto é, que vai "contrariar" o seu peso.

É, na verdade, isso o que se passa; existe **uma força por parte do fluido (líquido ou gás) que actua verticalmente sobre o corpo, de baixo para cima,** contrariando a acção exercida pelo peso do corpo. Essa força designa-se por **impulsão.**

Todos os dias observamos factos que mostram a impulsão exercida pelos líquidos sobre os corpos que neles estão mergulhados. Será que nunca experimentaste largar um pedaço de cortiça debaixo de água? Nunca te sentiste mais leve quando tomas banho no mar?

Pois bem, a impulsão é uma força que se opõe ao peso de um corpo e, conforme a relação entre o peso e a impulsão, o corpo **flutua, fica em suspensão no meio do fluido, ou afunda-se.**

Assim, qualquer corpo, mergulhado num fluido, terá um peso inferior ao seu **peso real**. Esse peso designa-se por **peso aparente do corpo.**



O dinamómetro A indica o valor do peso real do corpo. O dinamómetro B indica o valor do peso aparente do corpo.

Observemos a figura ao lado: a diferença entre os valores indicados pelo dinamómetro, com o corpo no ar e com o corpo mergulhado na água, dá o valor aproximado da impulsão.

$$|\vec{I}| = |\vec{Pr}| - |\vec{Pa}|$$

$\vec{I}$ – impulsão
$\vec{Pr}$ – peso real do corpo
$\vec{Pa}$ – peso aparente do corpo

Podemos concluir que **um corpo mergulhado completamente num líquido** fica sujeito à acção de duas forças verticais, mas de sentidos contrários; o seu próprio peso, que tende a fazê-lo descer, e a impulsão do líquido que, actuando de baixo para cima, tende a fazê-lo subir.

Conforme as intensidades destas duas forças, assim se podem verificar **três casos diferentes**:

- **Se o peso do corpo é inferior à impulsão do líquido**, o corpo sobe até à superfície do líquido, emergindo parcialmente e ficando a flutuar.

  $|\vec{P}| < |\vec{I}|$

- **Se o peso do corpo é igual à impulsão do líquido**, o corpo fica em equilíbrio no meio do líquido.

  $|\vec{P}| = |\vec{I}|$

- **Se o peso do corpo é superior à impulsão do líquido**, o corpo afunda-se.

  $|\vec{P}| > |\vec{I}|$

De que dependerá a força de impulsão?

Vamos agora ver que a **intensidade da força de impulsão** está relacionada com a **densidade do líquido** e com o **peso do volume de líquido deslocado** pela parte imersa do corpo.

Actividade

1

- Suspende, de um dinamómetro, uma esfera, por exemplo de cobre, e regista o seu peso real;
- mantendo a esfera suspensa no dinamómetro, mergulha-a numa tina com água;
- regista, agora, o seu peso aparente, indicado pelo dinamómetro;
- mergulha, em seguida, a esfera em álcool e depois em água salgada e regista os novos pesos;
- tira conclusões.

Deves ter concluído que ao mergulhares a esfera de cobre na água, no álcool, ou na água salgada, houve diminuição de peso, diminuição essa que se deve à impulsão do líquido. Deves também ter reparado que a impulsão na água salgada foi maior do que na água e que nesta foi maior do que no álcool (o álcool é menos denso do que a água e esta é menos densa do que a água salgada).

Efectivamente, quanto maior for a densidade de um líquido, maior é a impulsão que ele exerce sobre um corpo.

> Quanto maior for a densidade de um líquido, maior é a impulsão que ele exerce sobre um corpo.

Princípio de Arquimedes

Arquimedes foi considerado um dos maiores sábios da Antiguidade. Entre muitas descobertas e estudos, encontra-se uma lei que ficou conhecida por **Princípio de Arquimedes**.

Neste princípio, Arquimedes estabelece uma relação entre o valor da impulsão que um líquido exerce sobre um corpo e o peso do volume de líquido deslocado por esse corpo, quando nele mergulhado. Vejamos que relação é essa a que Arquimedes chegou.

Arquimedes
(287 a.C.-212 a.C.)
Um dos maiores sábios da Antiguidade, nasceu em Siracusa, Sicília. São-lhe atribuídas a descoberta do parafuso sem fim, a roda dentada, o cadernal, etc. Estudou o equilíbrio dos sólidos, o funcionamento da alavanca e o movimento dos corpos celestes. No seu «Tratado dos corpos flutuantes» estabeleceu as leis fundamentais da Hidrostática, onde se inclui a lei que ficou conhecida pelo seu nome – Princípio de Arquimedes.

81

20
FORÇAS E MOVIMENTO

Actividade

2

- Deita água num balão de Erlenmeyer com tubuladura lateral, até ao nível da tubuladura;
- suspende de um dinamómetro um pequeno objecto (que caiba na abertura do balão) e regista o valor do seu peso, Pr;
- coloca uma pequena tina de vidro, que pesaste previamente numa balança, por baixo da tubuladura lateral do balão;
- mergulha, em seguida, o objecto suspenso do dinamómetro na água do balão;
- regista, agora, o valor do peso aparente do corpo, Pa, indicado pelo dinamómetro;
- calcula o valor da impulsão que a água exerceu no objecto;
- pesa, agora, a água da tina – água deslocada pelo objecto;
- tira conclusões.

Deverás ter concluído que o valor da impulsão, que calculaste pela diferença entre os valores dos pesos real e aparente, é igual ao valor do peso do volume de água que foi deslocada pelo objecto, quando mergulhado no líquido.

Tal como tu, também Arquimedes chegou a essa conclusão que constitui o enunciado do princípio que tem o seu nome – **Princípio de Arquimedes**.

" PRINCÍPIO DE ARQUIMEDES: todo o corpo mergulhado num fluido (líquido ou gás) fica sujeito, da parte deste, a uma força vertical, dirigida de baixo para cima, cuja intensidade é igual ao peso do volume de fluido deslocado por esse corpo. "

Porque será então que os navios flutuam na água?

Os navios flutuam na água, porque recebem desta uma impulsão suficiente para poderem flutuar.

Os navios, apesar de serem feitos de materiais como ferro, aço, etc., conservam-se à superfície da água, porque recebem desta uma impulsão suficiente para poderem flutuar. E porquê?

Sabes que o valor da impulsão é igual ao peso do volume de líquido deslocado pelo corpo. Ora, é importante que os navios desloquem um volume de água suficientemente grande para que o peso da água deslocada seja elevado e, consequentemente, também a impulsão que sobre eles se exerce.

82

Daí os navios terem a forma que conheces, além de grandes espaços vazios no seu interior, para que a impulsão que a água exerce sobre eles seja suficiente para poderem flutuar.

Para fazer imergir um submarino, deixa-se entrar água nos seus tanques, aumentando assim o seu peso.

Como se explica que um submarino consiga imergir?

Os submarinos, tal como todos sabemos, são barcos que conseguem flutuar ou manter-se debaixo de água, a uma determinada profundidade. Como é isso possível?

Para tal, possuem tanques na sua parte inferior que podem ser cheios de água. Assim, para fazer imergir um submarino, deixa-se entrar água nos tanques, aumentando deste modo o seu peso, sem variar o seu volume. Para o fazer voltar à superfície, a água é expulsa dos tanques por meio de ar comprimido e, como o peso diminui sem variar o volume, a impulsão fá-lo subir até à superfície.

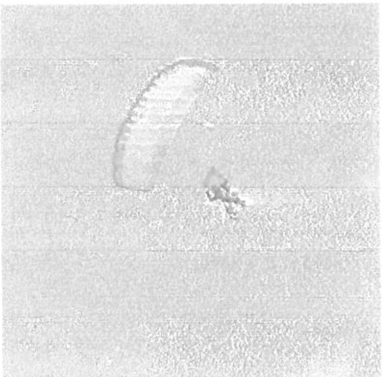
Como se explica a subida de um balão no ar?

Um balão elevar-se-á no ar quando o seu peso for inferior à impulsão que o ar exerce sobre ele.

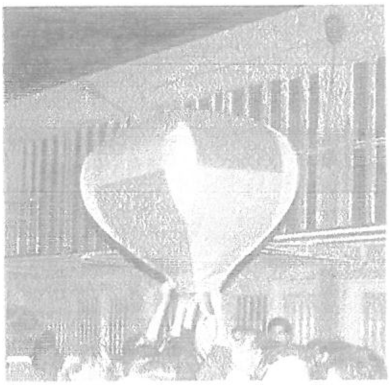
Para se conseguir esta condição os balões são normalmente cheios com um gás menos denso que o ar, como hélio, hidrogénio ou, então, ar quente. Este é menos denso que o ar frio, pois o aquecimento provoca aumento de volume, levando a uma diminuição da densidade.

Os balões-sonda, muito usados em meteorologia para explorarem as zonas superiores da atmosfera, são geralmente cheios com hélio, gás preferido ao hidrogénio, pois o hidrogénio é combustível, inflamando-se com facilidade.

O balão sobe porque a impulsão do ar é maior que o peso do balão.



A impulsão que o ar exerce sobre a superfície côncava do pára-quedas equilibra o peso do pára-quedista e do pára-quedas, fazendo com que o movimento se faça com velocidade constante.



Os balões de S. João sobem porque estão cheios de ar quente que, como sabemos, é menos denso que o ar frio que rodeia o balão.

Um balão eleva-se tanto mais facilmente quanto maior for a diferença entre a impulsão do ar que ele recebe e o seu peso total; por esse motivo os balões têm normalmente grandes dimensões, para que o seu volume seja grande relativamente ao seu peso.

APLICO

1 – Comenta a frase: "A densidade de uma substância é uma propriedade física característica dessa substância."
2 – O que é a impulsão?
3 – Quando é que um corpo flutua num líquido?
4 – Que diz o Princípio de Arquimedes?
5 – Porque é que os balões de S. João sobem?

21
FORÇAS E MOVIMENTO

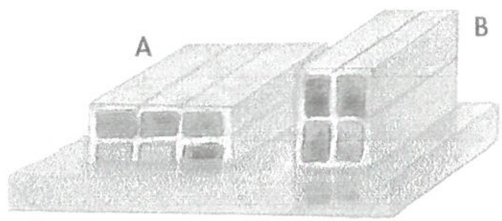
21. FORÇAS DE PRESSÃO E PRESSÕES

Forças iguais, distribuídas por superfícies de contacto com áreas diferentes, produzem efeitos diferentes.

Porque será que as marcas deixadas pelos esquis na neve são menos profundas que as marcas deixadas pelos sapatos?

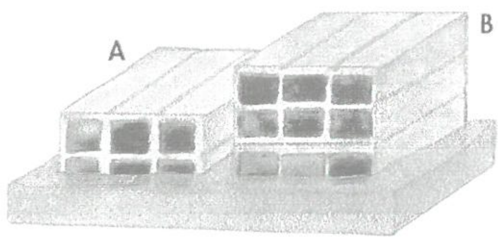
Este facto já não é novo para ti. Sabes bem que se usares um par de esquis te enterras menos na neve do que se calçares sapatos, embora a força que actua sobre a neve, que é o teu peso, seja a mesma. A diferença está na superfície em que te apoias; a superfície de apoio dos esquis é bem maior que a dos sapatos.

Porque será que o bloco de grés em B se enterra mais na areia do que o bloco de grés em A, pesando os dois o mesmo?



Embora a força que os blocos exercem sobre a areia seja a mesma, pois pesam o mesmo, os efeitos que elas produzem são diferentes; em A, a força (peso) distribui-se por uma área de apoio maior do que em B, enterrando-se menos.

Porque será que o conjunto dos dois blocos de grés em B se enterram mais na areia do que o bloco de grés em A, sendo a superfície de apoio a mesma?



Quanto maior for o peso de uma pessoa, mais ela se enterra, pois forças diferentes, distribuídas por superfícies de contacto com áreas iguais, produzem efeitos diferentes.

Apesar de a superfície de apoio ser a mesma, os efeitos que os blocos produzem na areia, nas duas situações, são diferentes, pois a força (peso) exercida na areia é diferente; em B, o peso é maior do que em A, enterrando-se mais o conjunto dos dois blocos.

21

FORÇAS E MOVIMENTO

Como vimos:

- A mesma força, distribuída por superfícies de contacto com áreas diferentes, produz efeitos diferentes.
- Forças diferentes distribuídas por superfícies de contacto com áreas iguais produzem efeitos diferentes.

Em Física surgiu, então, a necessidade de definir uma nova grandeza que pudesse quantificar o efeito que as forças produzem nas superfícies dos corpos sobre os quais actuam. Essa grandeza física é a **pressão**.

A **pressão** de uma força sobre uma superfície é, portanto, uma grandeza física que é definida pelo quociente entre a intensidade da força que actua perpendicularmente à superfície – **força de pressão** – e a **área** dessa superfície.

A pressão representa, portanto, a intensidade da força que um corpo exerce sobre a unidade de área da superfície de contacto.

$$p = \frac{F}{S}$$

p – pressão

F – intensidade da força de pressão

S – área da superfície de contacto

A pressão é uma grandeza física:

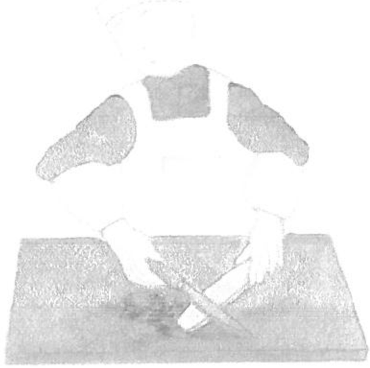
- tem unidades;
- pode medir-se.

F

p × S

A pressão exercida por uma força sobre uma superfície é tanto maior:

- quanto menor for a área da superfície de contacto sobre a qual a força actua;
- quanto maior for a intensidade da força de pressão exercida na superfície de contacto.



Para as facas e tesouras cortarem melhor, afiam-se; ao reduzir-se a sua superfície de contacto, aumenta-se a pressão que ela vai exercer ao cortar.

A pressão é uma **grandeza escalar** e o seu valor vem expresso no Sistema Internacional de Unidades, SI, em **newton por metro quadrado, N/m²**, unidade esta que é conhecida por **pascal, Pa**, em homenagem ao físico francês Pascal.

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

$$p = \frac{F}{S}$$

N (newton)

m² (metro quadrado)

N/m² (newton/metro quadrado)

Contudo, existem **outras unidades de pressão** muito usadas, no nosso dia-a-dia, em diversas situações. Por exemplo:

- **atmosfera, atm**, é uma unidade muito usada para exprimir a pressão atmosférica

$$1 \text{ atm} = 1{,}013 \times 10^5 \text{ Pa}$$

- **milímetro de mercúrio, mmHg,** unidade que está relacionada com a pressão de uma coluna de mercúrio com 760 mm de altura e 1 cm² de área de base

$$760 \text{ mmHg} = 1 \text{ atm}$$

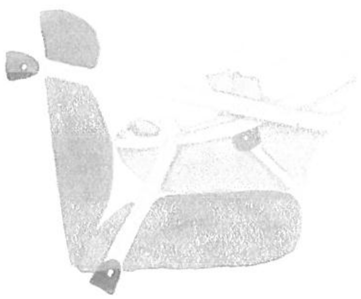
- **libra por polegada (inch) quadrada, lbf/in²**, é a unidade que ainda se usa nos aparelhos existentes nas estações de serviço (manómetros) para medir a pressão dos pneus

$$1 \text{ lbf/in}^2 = 6{,}89 \times 10^3 \text{ Pa}$$

21

FORÇAS E MOVIMENTO

O cinto de segurança impede que uma pessoa seja projectada, no caso de travagem brusca ou de acidente.



Os bebés, até aos 2 anos, quando viajam de automóvel devem usar cadeiras próprias e cintos de segurança.

Qual o papel dos cintos de segurança?

Quando falámos na Primeira Lei de Newton ou Lei da Inércia, dissemos que, na ausência de forças, um corpo em repouso permanece em repouso e um corpo em movimento continua o seu movimento em linha recta com velocidade constante.

É esta lei que explica, por exemplo, por que é que num automóvel que trava de repente os passageiros são atirados para a frente, sentindo a pressão do cinto de segurança, enquanto que num automóvel que arranca de repente, os passageiros já são atirados para trás, ficando como que "pregados ao assento". Segundo a inércia, os passageiros deslocam-se em sentido contrário ao do movimento do automóvel.

O cinto de segurança impede, portanto, que uma pessoa seja projectada no caso de acidente ou de travagem brusca.

A pressão que os cintos de segurança exercem sobre uma pessoa não é sempre a mesma; depende:

- da área do cinto;
- do tempo de imobilização do passageiro;
- da velocidade do automóvel.

Se não, vejamos:

A pressão exercida vai depender da área do cinto de segurança

Se pretenderes determinar a pressão que o cinto de segurança exerce no caso de colisão, terás que usar a expressão:

$$\text{Pressão} = \frac{\text{Força de colisão}}{\text{Área do cinto}}$$

Através dela, podes ver que para uma determinada força de colisão, **quanto maior for a área do cinto menor será a pressão que ele exerce**.

Para calculares a intensidade da força exercida pelo cinto sobre uma pessoa, durante uma colisão num movimento rectilíneo, lembra-te da lei da variação do momento linear. Aplicando essa lei,

$$F \times \Delta t = mv_2 - mv_1$$

poderás determinar a intensidade da força de colisão a partir da massa, m, do teu corpo, da tua velocidade inicial, v_1, e final, v_2 (que é zero) e do tempo de travagem, Δt.

Para calculares a área do cinto, deverás medir o comprimento de cinto que te segura, assim como a largura deste. A área será determinada pelo produto do comprimento pela largura, pois o cinto é rectangular.

"Para uma determinada força de colisão, quanto maior for a área do cinto, menor será a pressão que ele exerce."

Hoje, muitos carros já vêm equipados com "airbag" (além dos cintos de segurança) que permite minimizar as lesões, por vezes fatais, no caso de acidentes graves.

A pressão exercida vai depender do tempo de imobilização do passageiro

Como sabes, devido à elasticidade dos cintos de segurança, o tempo de imobilização de uma pessoa, durante um choque, é um pouco maior do que seria se estes não fossem elásticos. Esta particularidade dos cintos tem como principal objectivo diminuir a intensidade da força de colisão pois, atendendo a que, num movimento rectilíneo:

$$F \times \Delta t = \Delta p$$

podemos afirmar que, para a mesma variação de momento linear, **quanto maior for o tempo de imobilização** menor vai ser a intensidade da força de colisão e, consequentemente, menor vai ser **a pressão que o cinto de segurança exerce** sobre o passageiro.

"Para um cinto de segurança com uma determinada área, quanto maior for o tempo de imobilização do passageiro, menor será a força de colisão e, consequentemente, menor será a pressão exercida sobre o passageiro."

A pressão exercida vai depender da velocidade do automóvel

Durante uma travagem ou colisão a variação da energia cinética, ΔE_c, do automóvel pode ser dada pela expressão:

$$F \times d = \frac{1}{2} m v_1^2$$

o que nos mostra que, para a mesma distância de colisão d (repara que esta distância de colisão, no caso de choque, corresponde em geral ao comprimento do "capot" do automóvel), quanto maior for a velocidade inicial, v_1, maior vai ser a força de colisão, F.

Assim, quanto maior for a força de colisão maior vai ser a pressão exercida no cinto de segurança.

"Quanto maior for a velocidade de um automóvel, com cintos de segurança de uma determinada área, maior vai ser a força de colisão e, consequentemente, maior vai ser a pressão exercida pelos cintos de segurança sobre os passageiros."

APLICO

1 – Como varia a pressão exercida por uma força, com a área da superfície de contacto?

2 – Que unidades de pressão conheces?

3 – Para que servem os cintos de segurança?

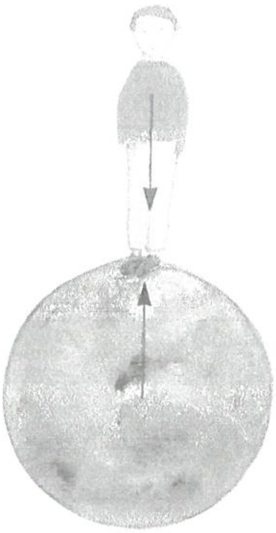
4 – De que depende a pressão exercida pelos cintos de segurança?

5 – Como varia a pressão exercida pelos cintos de segurança com a velocidade do automóvel?

22. O EQUILÍBRIO DOS CORPOS

Dissemos que quando um corpo se encontra em repouso, isto é, em **equilíbrio estático**, a resultante de todas as forças que sobre ele actuam é zero. Assim, para que um corpo se encontre em equilíbrio, é necessário que todas as forças a que está sujeito se compensem exactamente.

É precisamente a Estática, a área da Física que estuda o equilíbrio dos corpos.



O peso de um corpo não é mais do que a força gravítica exercida pela Terra sobre esse corpo.

Centro de gravidade de um corpo

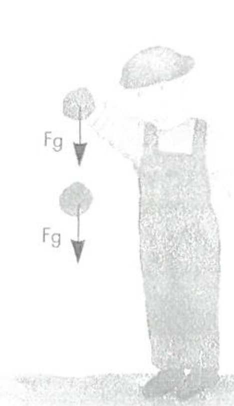
Sabes já que qualquer corpo que não esteja apoiado ou suspenso de um suporte, ao ser atraído para a Terra, cai. Dizemos que ele cai devido ao seu peso. Podemos então dizer que **o peso de um corpo resulta da força gravítica que a Terra exerce sobre esse corpo.**

O peso de um corpo é, portanto, **uma força**. Para o representar, recorremos a um vector, que nos indica a sua intensidade, direcção, sentido e ponto de aplicação.

As **características do vector peso de um corpo** são:

- **Intensidade** – valor numérico do peso desse corpo acompanhado da respectiva unidade.
- **Direcção** – vertical.
- **Sentido** – de cima para baixo.
- **Ponto de aplicação** – centro de gravidade do corpo.

E o que é o centro de gravidade de um corpo?



Qualquer corpo, que não esteja ligado a um suporte, cai para a Terra, devido à força gravítica.

O centro de gravidade de um corpo é o ponto do corpo onde supomos que se encontra aplicado o seu peso. No caso do corpo ser regular e homogéneo, o centro de gravidade coincide com o centro geométrico do corpo. Assim, quando o corpo tem a forma de um cubo, o centro de gravidade está no centro do cubo (ponto de intersecção das suas diagonais); quando o corpo tem a forma de uma esfera, o centro de gravidade é o próprio centro da esfera; etc.

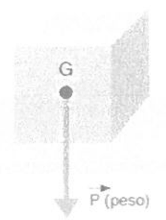
22

FORÇAS E MOVIMENTO

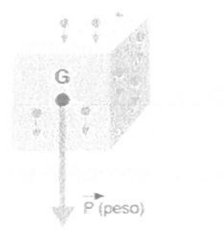
Sabes que todos os corpos são constituídos por um grande número de pequenas partículas. Sobre cada uma delas actua a força de gravidade. Como estas forças gravíticas são paralelas e do mesmo sentido, a resultante do sistema destas forças gravíticas vai ter uma intensidade igual à soma das suas intensidades.

O peso do corpo é, precisamente, a resultante de todas as acções que a gravidade exerce sobre o corpo.

O centro de gravidade de um corpo nem sempre está no corpo, como é o caso de um anel.



O ponto de aplicação do peso do corpo designa-se por centro de gravidade, G.



O peso do corpo é a resultante das acções gravíticas que a Terra exerce sobre todas as partículas do corpo.

O centro de gravidade de um corpo é o ponto de aplicação do peso do corpo.

Como determinar, experimentalmente, o centro de gravidade de um corpo, mesmo que ele seja irregular?

Actividade

1

- Suspende um cartão rectangular num suporte;
- com a ajuda de um fio de prumo, traça no cartão a vertical que passa por esse ponto de suspensão (ponto A);
- repete a experiência suspendendo o cartão por outros pontos.

Que observas?

Deverás ter observado que todas as linhas traçadas sobre o cartão se cruzam num mesmo ponto. Esse ponto vai ser o centro de gravidade do corpo.

Equilíbrio de corpos suspensos

Conhecida a posição do centro de gravidade de um corpo, é, em geral, possível prever as posições de equilíbrio desse corpo.

Se repetires, agora, a actividade anterior, como já conheces o centro de gravidade do cartão que utilizaste, poderás verificar que, seja qual for o ponto por onde suspendas o cartão, este irá ficar em equilíbrio quando o ponto de suspensão e o centro de gravidade estiverem na mesma vertical.

Equilíbrio estável

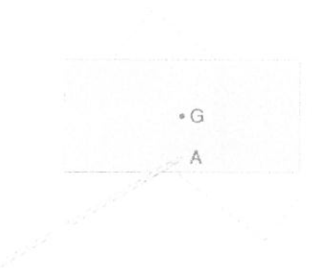
Equilíbrio estável

Equilíbrio estável

Em qualquer uma das posições de equilíbrio, indicadas na figura, mesmo que desloques o cartão, ele volta espontaneamente à posição inicial. Dizemos, quando isso acontece, que o **equilíbrio é estável**.

Repara que, nas diferentes posições de **equilíbrio estável, o centro de gravidade do cartão encontra-se abaixo do ponto de suspensão.**

Pode acontecer que o **centro de gravidade de um corpo** esteja **acima do ponto de suspensão**. Nesse caso, o **equilíbrio** diz-se **instável**, pois quando o corpo é afastado da posição de equilíbrio, mesmo que seja ligeiramente, o corpo desloca-se e não volta mais a essa posição.

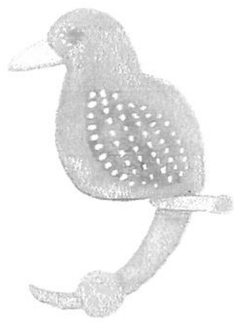


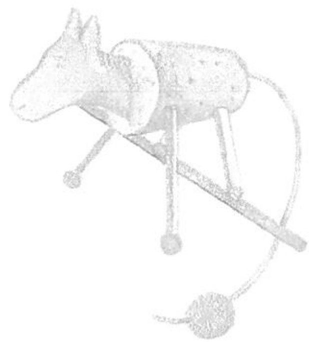
Equilíbrio instável

Quando o **centro de gravidade coincide com o ponto de suspensão, o equilíbrio é indiferente,** pois, desviando o corpo da sua posição de equilíbrio, ele continua em equilíbrio na nova posição.

Equilíbrio indiferente

Podemos concluir que o equilíbrio de um corpo suspenso será tanto mais estável quanto mais baixo estiver o centro de gravidade do corpo em relação ao eixo de suspensão.

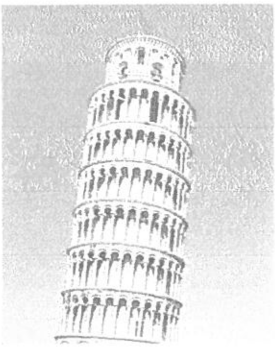


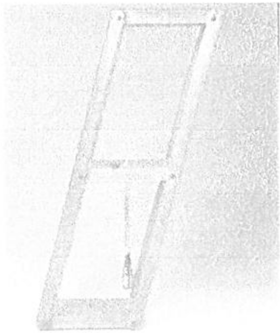


"Um corpo suspenso está em equilíbrio quando o ponto de suspensão e o centro de gravidade se encontram na mesma vertical. O equilíbrio de um corpo suspenso será tanto mais estável, quanto mais baixo estiver o centro de gravidade do corpo em relação ao eixo de suspensão."

22
FORÇAS E MOVIMENTO

Equilíbrio de corpos apoiados





Um corpo apoiado num plano está em equilíbrio quando a vertical, que passa pelo seu centro de gravidade, cai dentro da base de sustentação.

Vamos ver que a posição do centro de gravidade de um corpo tem também influência no equilíbrio dos corpos apoiados por uma base – **base de apoio** ou **base de sustentação.**

É possível verificar experimentalmente que um corpo apoiado num plano está em equilíbrio quando a vertical que passa pelo seu centro de gravidade cai dentro da base de sustentação.

Também seria possível verificar que o equilíbrio de um corpo apoiado num plano horizontal é tanto mais estável quanto mais baixo estiver o centro de gravidade do corpo e quanto maior for a base de apoio do corpo.

Podemos, aqui, considerar **três casos diferentes de equilíbrio de corpos apoiados**. Assim:

Equilíbrio estável — Equilíbrio instável — Equilíbrio indiferente

- **Um corpo apoiado encontra-se em equilíbrio estável** quando, uma vez afastado ligeiramente da sua posição de equilíbrio, tende a voltar novamente a ela.
- **Um corpo apoiado encontra-se em equilíbrio instável** quando um pequeno deslocamento da sua posição de equilíbrio o faz desviar ainda mais dessa posição de equilíbrio.
- **Um corpo apoiado encontra-se em equilíbrio indiferente** quando fica em equilíbrio em qualquer posição que o coloquemos. Neste caso, o centro de gravidade está, em qualquer uma das posições, à mesma altura.

- Um corpo apoiado num plano está em equilíbrio, quando a vertical que passa pelo seu centro de gravidade cai dentro da base de sustentação.
  O equilíbrio de um corpo apoiado será tanto mais estável, quanto mais baixo se encontrar o seu centro de gravidade e quanto maior for a sua base de apoio.

O João-teimoso encontra-se em equilíbrio estável; uma vez deslocado desta posição, ele volta a ela.

APLICO

1 – O que é o centro de gravidade de um corpo?
2 – Se um corpo for regular e homogéneo, onde se situa o seu centro de gravidade?
3 – A posição do centro de gravidade de um corpo terá alguma influência no equilíbrio deste?
4 – Se o centro de gravidade coincidir com o ponto de suspensão, que tipo de equilíbrio temos?
5 – Qual é a condição de equilíbrio de um corpo apoiado?

13. Duas forças iguais, ao serem aplicadas durante o mesmo tempo, a dois corpos diferentes, que se encontravam parados numa superfície de atrito desprezável, imprimiram-lhes movimento com trajectórias paralelas. Qual das afirmações é correcta para o instante em que as forças deixam de actuar? Justifica.

A – A aceleração adquirida pelos dois corpos é igual.

B – Como os corpos são diferentes, o impulso recebido é diferente.

C – O momento linear dos dois corpos é igual.

D – O corpo de maior massa adquire maior momento linear.

14. Dois corpos, A e B, de 6,0 kg e 4,0 kg, deslocam-se na mesma direcção e sentido, com velocidades iguais a 15,0 m/s e 10,0 m/s, respectivamente. Calcula a velocidade dos dois corpos, sabendo que eles seguem juntos após o choque.

15. Um automóvel seguia numa estrada rectilínea à velocidade de 108 km/h, quando surge um obstáculo à sua frente e o condutor trava bruscamente.

15.1 Supondo que o condutor teve um tempo de reacção de 0,6 s, calcula a distância de reacção.

15.2 Se o condutor, ao travar, tiver aplicado ao veículo uma aceleração constante de 5 m/s^2, quanto tempo terá demorado a travagem?

15.3 Calcula a distância de travagem do automóvel.

15.4 Qual o valor de distância de segurança para este automóvel?

16. Dois automóveis A e B deslocam-se no mesmo sentido ao longo de uma estrada rectilínea e à velocidade de 20,0 m/s e de 10,0 m/s, respectivamente. No instante em que o automóvel A ultrapassa o B, os dois condutores apercebem-se de um sinal vermelho e iniciam simultaneamente a travagem.

16.1 Calcula o valor da aceleração a que cada um dos automóveis foi submetido durante a travagem e compara esses valores.

16.2 Determina a distância de travagem para os dois automóveis.

16.3 Para a mesma força de travagem, compara a distância de travagem com a velocidade a que o automóvel se desloca.

16.4 Que relação há entre as distâncias de travagem dos dois automóveis?

17. Classifica as afirmações seguintes em verdadeiras e falsas e corrige as últimas.

A – Um corpo imerso no álcool recebe uma impulsão maior do que quando imerso na água.

B – O gelo flutua porque a impulsão que recebe é menor do que o seu peso.

C – A impulsão recebida por um corpo imerso num fluido é uma força de intensidade igual ao valor do peso do volume de fluido deslocado.

D – Quanto maior for a densidade de um fluido menor é a impulsão que ele exerce num corpo.

18. Observa as figuras:

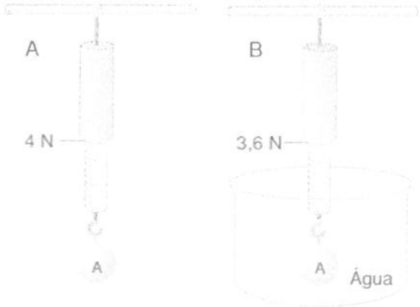
18.1 Qual o valor do peso real do corpo A?

18.2 Qual o seu peso aparente?

18.3 Qual o valor da impulsão que a água exerce no corpo A?

18.4 Qual o valor do peso da água deslocada pelo corpo A?

18.5 Se em vez de água, usasses glicerina ($d = 1{,}3\ g/cm^3$), a impulsão recebida pelo corpo A seria igual, maior ou menor? Justifica.



19. Um cubo de alumínio de 8 cm^3 de volume, está em equilíbrio na água de uma tina, como mostra a figura. A densidade do alumínio é 2,7 g/cm^3.

19.1 Qual o valor da impulsão, em unidades SI, recebida pelo cubo? Justifica.

19.2 Calcula o peso do cubo, admitindo que ele é maciço.

19.3 Diz, justificando, se o cubo é realmente maciço ou se é oco.

20. A pressão, exercida por uma força sobre uma superfície, depende da força que se exerce e da superfície de apoio.

20.1 Para a mesma força, como varia a pressão com a área da superfície de apoio?

20.2 Para a mesma superfície de apoio, como varia a pressão com a força que se exerce sobre essa superfície?

20.3 Calcula o valor da pressão devida ao teu peso, quando te apoias com os dois pés e com um só pé, admitindo que a área da superfície de cada pé é 200 cm^2.

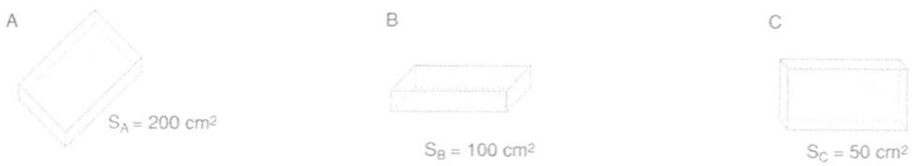
21. Ainda relativamente à grandeza física pressão completa as frases que se seguem, usando os termos maior ou menor:

A – A pressão exercida por uma força sobre uma superfície é tanto ________, quanto menor for a área da superfície sobre a qual a força actua.

B – Quanto maior for a intensidade da força de pressão exercida numa dada superfície de contacto, _______ vai ser a pressão.

C – A pressão exercida por uma força sobre uma superfície é tanto menor, quanto ________ for a intensidade da força e _________ for a superfície onde a força actua.

22. Na figura encontam-se representados três blocos, A, B e C, iguais, de 40 N de peso cada um e assentes, respectivamente, pelas superfícies S_A, S_B e S_C, diferentes.



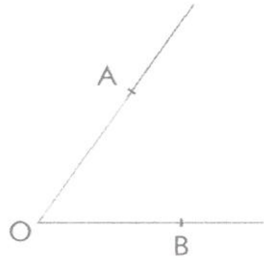
22.1 Em qual das situações a pressão exercida na superfície de contacto é maior? Justifica.

22.2 Calcula, em unidades SI, o valor da pressão correspondente à situação A.

22.3 Quantas vezes a pressão exercida por C é maior que a exercida por B? Justifica.

Ângulos

Recorda:

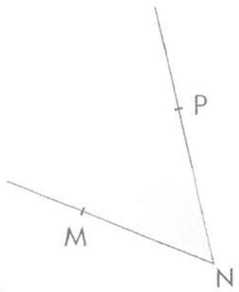


$\dot{O}A$ — lados do ângulo
$\dot{O}B$

O — vértice

Sabes que duas figuras são geometricamente iguais se se podem sobrepor ponto por ponto.

- Averigua se são geometricamente iguais os ângulos AOB e MNP (usa papel vegetal).



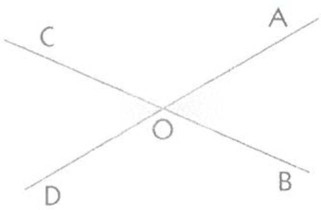
Ângulos geometricamente iguais têm a mesma amplitude.

A amplitude de um ângulo mede-se, por exemplo, em graus, com um transferidor.
Usa o transferidor para medir a amplitude do ∢AOB.

Verificaste que: $A\hat{O}B = 55°$

Ângulos Verticalmente Opostos

- Têm o mesmo vértice.
- Os lados de um ângulo estão no prolongamento dos lados do outro.



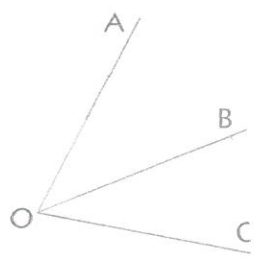
Na figura: ∢COD e ∢AOB são verticalmente opostos.
∢COA e ∢DOB são verticalmente opostos.

Por decalque, compara os pares de ângulos verticalmente opostos. Que concluis?

Ângulos verticalmente opostos são geometricamente iguais.

Ângulos Adjacentes

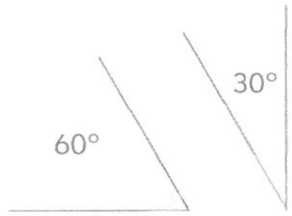
- Têm o mesmo vértice.
- Têm um lado comum que os separa.



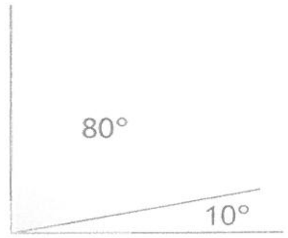
Na figura: ∢AOB e ∢BOC são adjacentes.
∢AOB e ∢AOC não são adjacentes.

Ângulos Complementares e Ângulos Suplementares

- Dois ângulos dizem-se complementares quando a sua soma é 90°.

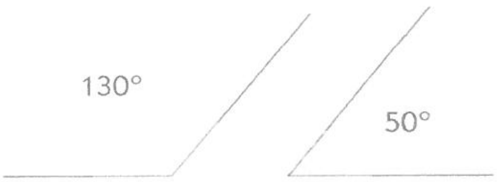


Ângulos complementares



Ângulos adjacentes complementares

- Dois ângulos dizem-se suplementares quando a sua soma é 180°.

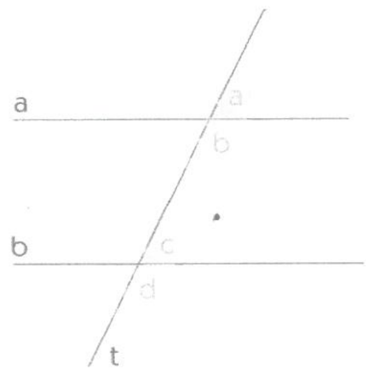


Ângulos suplementares

Ângulos adjacentes suplementares

Ângulos de Lados Paralelos

Observa a figura onde as rectas paralelas *a* e *b* formam, com a recta *t*, dois tipos de ângulos assinalados a cor diferente.



Usa material de desenho e averigua:

- Os lados do ângulo a são paralelos aos lados do ângulo c?
- Os ângulos a e c são geometricamente iguais? São agudos?
- Os lados do ângulo b são paralelos aos lados do ângulo d?
- Os ângulos b e d são geometricamente iguais? São obtusos?
- Os lados do ângulo a são paralelos aos lados do ângulo d?
- Os ângulos a e d são suplementares?

Dois ângulos de lados paralelos:

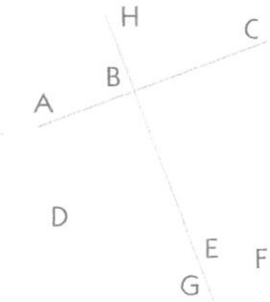
- ... se são ambos agudos, obtusos ou rectos, são geometricamente iguais.
- ... se são um agudo e outro obtuso, são suplementares.

Na figura:

a e c são ângulos de lados paralelos, agudos; logo, geometricamente iguais.
b e d são ângulos de lados paralelos, obtusos; logo, geometricamente iguais.
a e d são ângulos de lados paralelos, um agudo, outro obtuso; logo, suplementares.

95

PARA RESOLVER



15 • **15.1** Na figura, indica:

a) todos os ângulos verticalmente opostos;

b) um ângulo suplementar do ∢DEG;

c) um ângulo adjacente ∢CBH;

15.2 Os ângulos GED e GEF são adjacentes? Justifica.

16 • *a*) Desenha um ∢AOB de amplitude 55°.

b) Desenha o ∢BOC adjacente ao ∢AOB, de amplitude 35°.

c) Qual a amplitude do ∢AOC? Como se chamam os ∢AOB e ∢BOC?

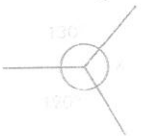
17 • *a*) Dois ângulos obtusos podem ser suplementares? Justifica.

b) Dois ângulos agudos podem ser complementares? Justifica.

18 • **Observa:**

Em cada caso, calcula $\hat{x}$. Justifica.

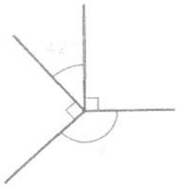
- Ângulos verticalmente opostos são iguais.
  $\hat{x} = 43°$



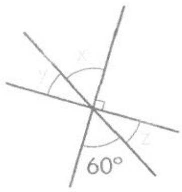
- A soma das amplitudes dos três ângulos é 360°.
  $\hat{x} + 130 + 120 = 360$ $\hat{x} = 360 - 250$ $\hat{x} = 110°$

- Os dois ângulos são suplementares.
  $140 + \hat{x} = 180$ $\hat{x} = 40°$

a) Calcula $\hat{y}$. Justifica.



b) Calcula $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$. Justifica.

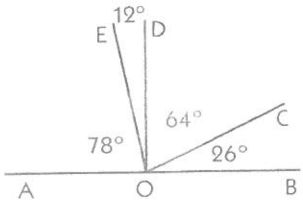


19 • Na figura, identifica:

a) todos os pares de ângulos complementares;

b) um par de ângulos adjacentes não complementares;

c) um par de ângulos suplementares.

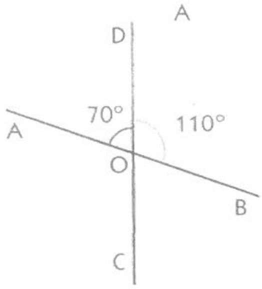


20 • Na figura, identifica:

a) um par de ângulos geometricamente iguais;

b) um par de ângulos verticalmente opostos;

c) um par de ângulos adjacentes suplementares.



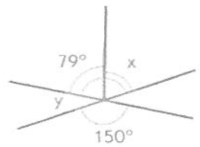
96

21 • Sou o ângulo complementar de 59°. Quem sou?

22 • Sou o ângulo suplementar de 113°. Quem sou?

23 • **Observa:**

Calcula $\hat{x}$ e $\hat{y}$, na figura. Justifica.



- Os ângulos assinalados a vermelho são verticalmente opostos, logo:

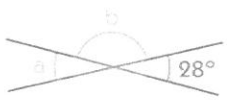
$$79 + x = 150$$
$$\hat{x} = 71°$$

- Os ângulos y e 150° são adjacentes suplementares, logo

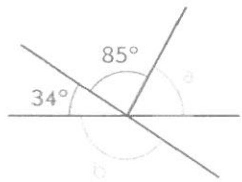
$$y + 150 = 180$$
$$\hat{y} = 30°$$

Calcula e nas figuras. Justifica.

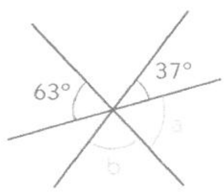
a)



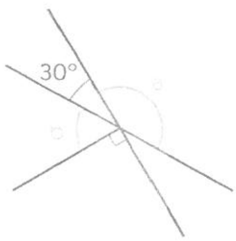
c)



b)

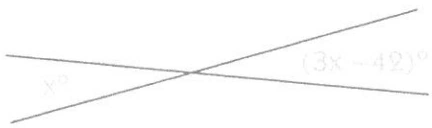


d)



24 • **Observa:**

Calcula . Justifica.



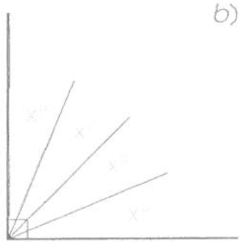
Os dois ângulos assinalados na figura são verticalmente opostos.
Logo, são iguais:

$$x = 3x - 42$$
$$2x = 42$$
$$x = 21$$

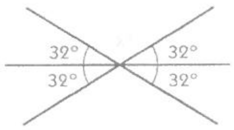
97

Calcula x. Justifica.

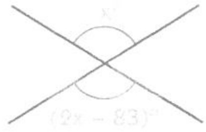
a)



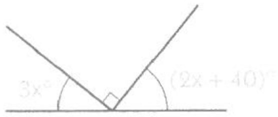
b)



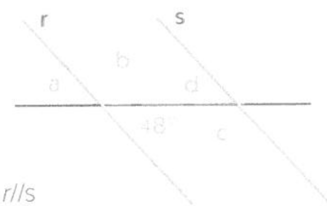
c)



d)



25 • **Observa:**

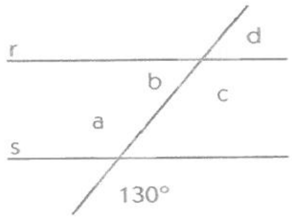


Calcular $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$, $\hat{d}$.

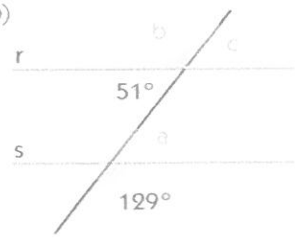
- $\hat{a} = 48°$ verticalmente opostos
- $\hat{b} = 180° - 48° = 132°$ *a* e *b* suplementares
- $\hat{c} = \hat{a} = 48°$ ângulos de lados paralelos
- $\hat{d} = 180° - 48° = 132°$ *c* e *d* suplementares

Calcula a amplitude dos ângulos desconhecidos na figura; as rectas *r* e *s* são paralelas.

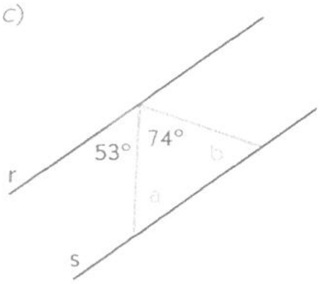
a)



b)

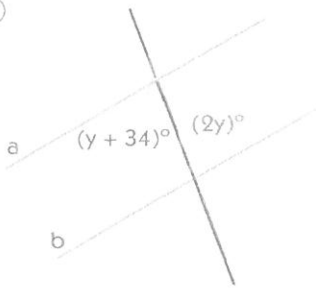


c)

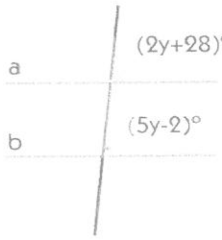


26 • Descobre o valor de y, sabendo que *a* e *b* são rectas paralelas.

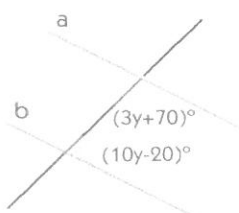
a)



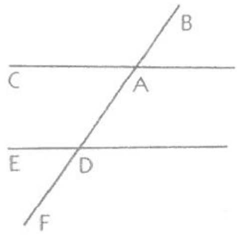
b)



c)



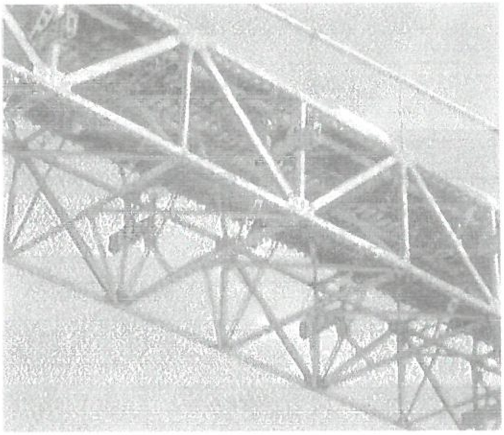
27 • Na figura, $C\hat{A}B = 125°$ e $E\hat{D}F = 65°$; as rectas CA e ED são paralelas? Justifica a tua resposta.



98

TRIÂNGULOS

DESIGUALDADE TRIANGULAR



Por que razão serão os triângulos tão usados na construção?

Já sabes que o triângulo, polígono com três lados e três ângulos, não é deformável, é rígido.

Com 3 segmentos de recta ao acaso será sempre possível construir um triângulo?

Investiga.

Corta tiras fininhas de cartolina com os seguintes comprimentos: 12 cm, 9 cm, 6 cm e 3 cm.

Experimenta «formar» triângulos, agrupando as tiras 3 a 3, de todas as maneiras possíveis. Que aconteceu?

Com certeza chegaste a situações do tipo

Com 3 segmentos de recta nem sempre é possível construir um triângulo.

Podemos registar os resultados obtidos num quadro como o seguinte:

COMPRIMENTOS DOS LADOS			OBTEVE-SE TRIÂNGULO
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
12	9	[illegible]	NÃO
12	[illegible]	[illegible]	NÃO
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

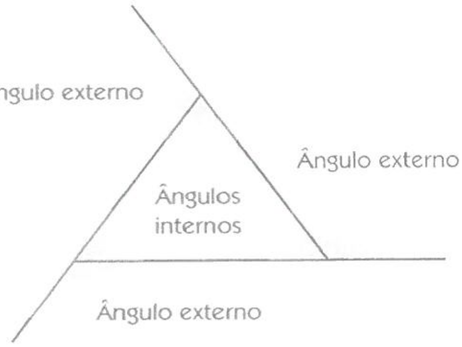
Compara, em cada caso, um dos comprimentos com a soma dos outros dois.
Que concluis?

Recorda o que aprendeste sobre construção de triângulos no 6.° ano e constrói os dois triângulos possíveis. 99

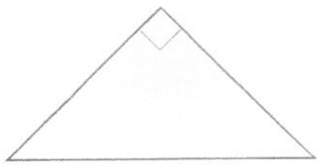
ÂNGULOS NUM TRIÂNGULO

Num triângulo há:

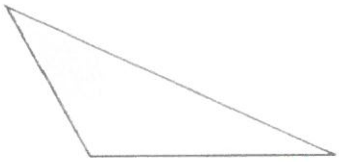
- três ângulos internos;
- três ângulos externos.



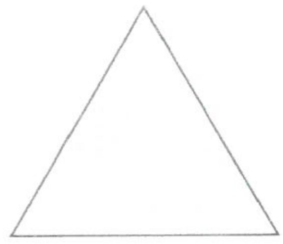
Recorda a classificação dos triângulos quanto aos ângulos.



O triângulo rectângulo tem 1 ângulo recto.



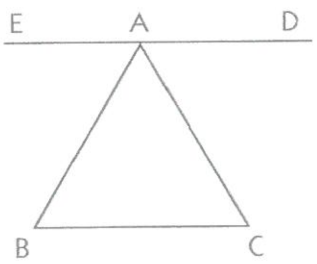
O triângulo obtusângulo tem 1 ângulo obtuso.



O triângulo acutângulo tem os 3 ângulos agudos.

SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM TRIÂNGULO

Observa a figura onde:



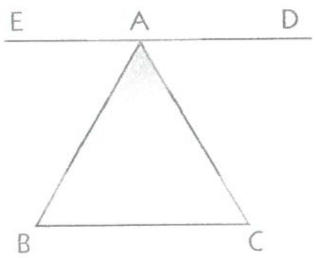
A recta ED é paralela à recta BC e passa pelo ponto A.

Usa os teus conhecimentos sobre ângulos de lados paralelos e compara:

- ∢ABC e ∢BAE;
- ∢ACB e ∢CAD.

Quanto somam os três ângulos internos do triângulo?

Com certeza descobriste que, na figura:



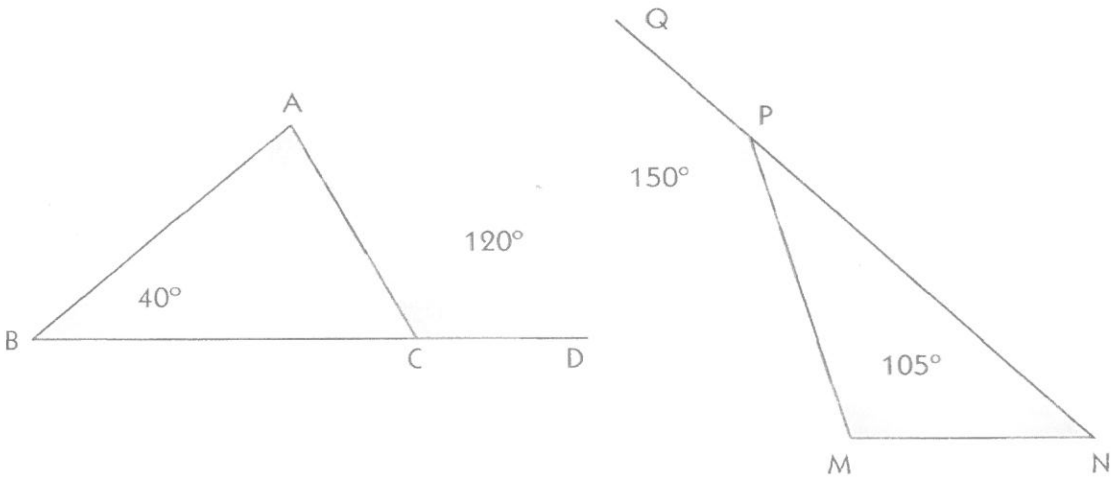
$$A\hat{B}C + B\hat{C}A + C\hat{A}B = 180^\circ$$

A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

Pensa:
Que podes dizer sobre os dois ângulos agudos de um triângulo rectângulo?

Ângulo externo de um triângulo

Observa atentamente os triângulos [ABC] e [MNP] e procura responder às questões:



• Que nome dás aos pares de ângulos:

∢ACB e ACD?

∢MPN e MPQ?

• Calcula:

$A\hat{C}B =$

$B\hat{A}C =$

• Calcula:

$M\hat{P}N =$

$M\hat{N}P =$

• Regista os resultados.

	$A\hat{B}C$ interno	$B\hat{A}C$ interno	$A\hat{C}D$ externo
Δ [ABC]			

	$M\hat{N}P$ interno	$P\hat{M}N$ interno	$M\hat{P}Q$ externo
Δ [MNP]			

Para cada triângulo, compara o ângulo externo com a soma dos dois ângulos internos não adjacentes. Que concluis?

Confirma a tua conclusão com outros triângulos por ti escolhidos.

Num triângulo, um ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes.

Eixos de Simetria num Triângulo

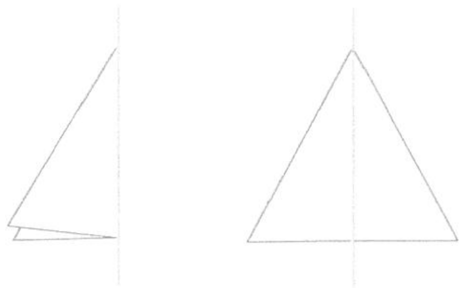
Recorda a classificação dos triângulos quanto aos lados:

O triângulo equilátero tem os 3 lados iguais. | O triângulo escaleno tem os 3 lados diferentes. | O triângulo isósceles tem 2 lados iguais.

Constrói, em papel vegetal, com dimensões à tua escolha, três triângulos, sendo:

um equilátero ; um isósceles ; um escaleno.

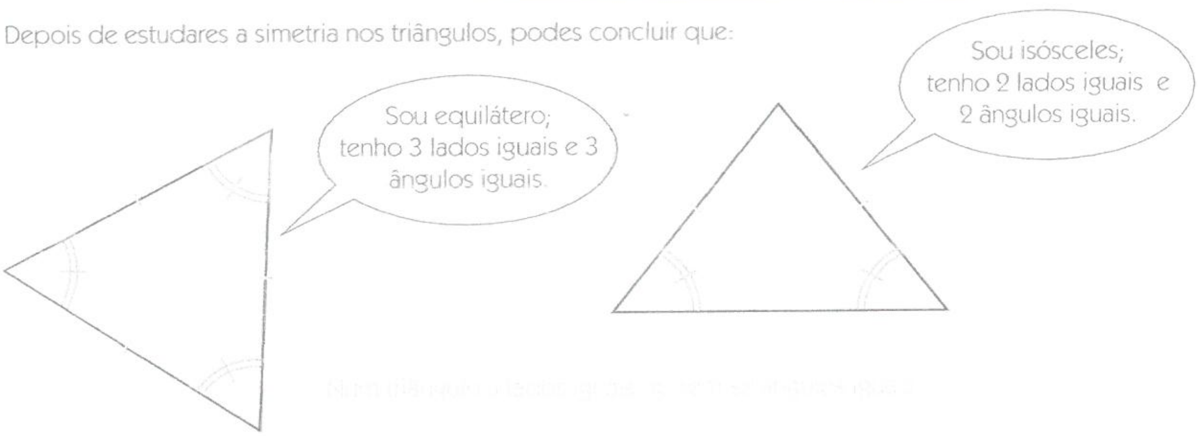
Faz dobragens e investiga se existem eixos de simetria em cada um desses triângulos e, em caso afirmativo, quantos são.
Verificaste que:



- o triângulo equilátero tem 3 eixos de simetria;
- o triângulo isósceles tem 1 eixo de simetria;
- o triângulo escaleno não tem eixos de simetria.

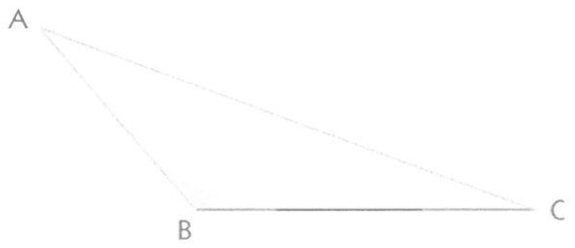
Relações entre Lados e Ângulos de um Triângulo

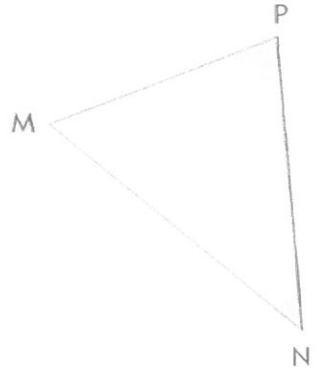
Depois de estudares a simetria nos triângulos, podes concluir que:



102

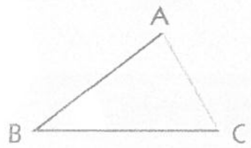
Observa agora os dois triângulos:





- Usa a régua e o transferidor e, em cada triângulo, mede:
  — os comprimentos dos lados;
  — a amplitude dos ângulos internos.

- Coloca, por ordem crescente, para cada triângulo:
  — as amplitudes dos ângulos;
  — os comprimentos dos lados.



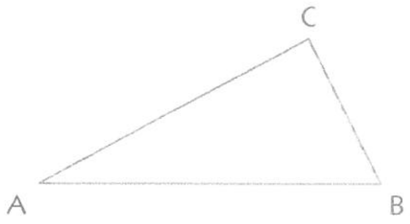
Falar do lado oposto ao ∢ ABC é o mesmo que falar do lado em frente ao ∢ ABC.

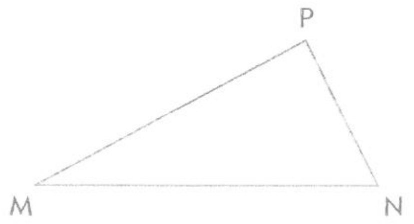
Verificas, facilmente, que:

Num triângulo, ao maior lado opõe-se o maior ângulo.
Num triângulo, ao menor lado opõe-se o menor ângulo.

Casos de Igualdade de Triângulos

Dois triângulos dizem-se geometricamente iguais se são sobreponíveis ponto por ponto.
Em dois triângulos geometricamente iguais, a cada elemento de um corresponde, no outro, um elemento geometricamente igual.





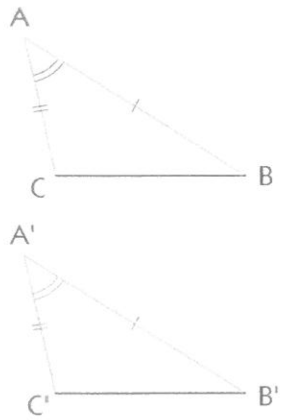
Assim, se o $\Delta\,[ABC]$ é geometricamente igual ao $\Delta\,[MNP]$, tem-se que:

$\overline{AB} = \overline{MN}$ $\quad A\hat{B}C = M\hat{N}P$
$\overline{BC} = \overline{NP}$ $\quad B\hat{C}A = N\hat{P}M$
$\overline{AC} = \overline{MP}$ $\quad C\hat{A}B = P\hat{M}N$

No entanto, para se poder afirmar que dois triângulos são geometricamente iguais, basta saber que três determinados elementos são iguais, de um para o outro triângulo.

(103)

1.º caso:



Dado um triângulo [ABC], desenha:

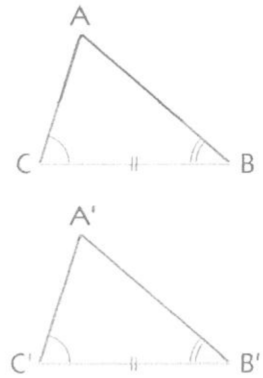
- o segmento de recta A'B' tal que $\overline{A'B'} = \overline{AB}$
- o ∢B'A'C', sendo $B'\hat{A}'C' = B\hat{A}C$
- faz $\overline{A'C'} = \overline{AC}$
- completa o desenho do Δ [A'B'C'], que, por construção, tem:

$\overline{A'B'} = \overline{AB}$
$\overline{A'C'} = \overline{AC}$
$C'\hat{A}'B' = C\hat{A}B$

Verifica que o Δ [ABC] é sobreponível ao Δ [A'B'C']

l.a.l

2.º caso:



Dado um triângulo [ABC]:

- desenha um segmento de recta [B'C'] tal que $\overline{B'C'} = \overline{BC}$
- desenha os ∢A'B'C' e ∢A'C'B', adjacentes ao lado [B'C'], respectivamente iguais ao ∢ABC e ∢ACB
- Completa o triângulo [A'B'C'] que, por construção, tem:

$\overline{B'C'} = \overline{BC}$

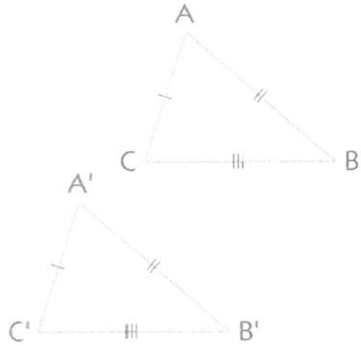
$A'\hat{B}'C' = A\hat{B}C$

$A'\hat{C}'B' = A\hat{C}B$

- Verifica que o Δ [ABC] é sobreponível ao Δ [A'B'C']

a.l.a

3.º caso:



Já sabes que conhecidos os comprimentos dos lados de um triângulo este fica perfeitamente definido.

- Desenha um triângulo [ABC] tal que:

$\overline{AB} = 2{,}6$ cm , $\overline{BC} = 2{,}8$ cm , $\overline{AC} = 2$ cm

- Desenha em papel transparente outro triângulo, [A'B'C'], tal que: $\overline{A'B'} = \overline{AB}$, $\overline{B'C'} = \overline{BC}$, $\overline{A'C'} = \overline{AC}$
- Sobrepõe o triângulo [A'B'C'] ao triângulo [ABC]. Que observas?

l.l.l

104

PARA RESOLVER

28.

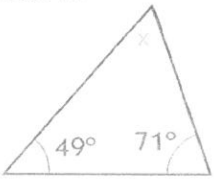
28.1 Diz se é possível construir um Δ [ABC] em cada um dos casos seguintes:

a) $\overline{AC} = 3$ cm	$\overline{AB} = 7$ cm	$\overline{BC} = 10$ cm
b) $\overline{AB} = 8$ cm	$\overline{BC} = 5$ cm	$\overline{AC} = 2$ cm
c) $\overline{AB} = 8$ cm	$\overline{BC} = 5$ cm	$\overline{AC} = 5$ cm
d) $\overline{AB} = 7$ cm	$A\hat{B}C = 100°$	$B\hat{A}C = 100°$
e) $\overline{AB} = 4$ cm	$\overline{AC} = 8{,}5$ cm	$\overline{BC} = 7{,}5$ cm

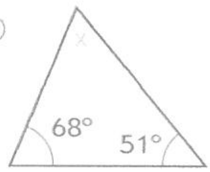
28.2 Nos casos possíveis, constrói os triângulos e classifica-os quanto aos lados.

29. Observa as figuras:
Calcula $\hat{x}$.

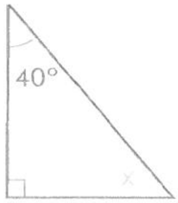
a)



b)

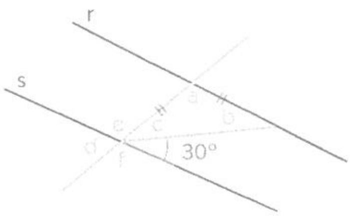


c)

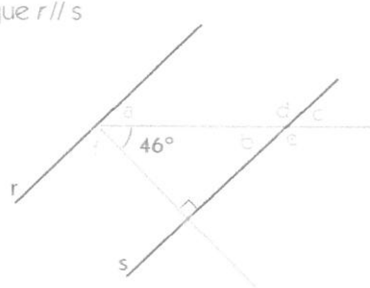


30. Calcula $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$, $\hat{d}$, $\hat{e}$, $\hat{f}$, sabendo que $r // s$

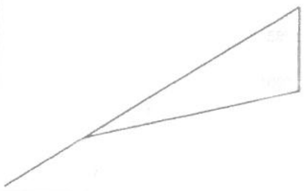
a)



b)



31. **Observa:**

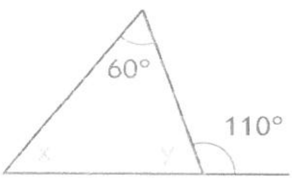


Calcular $\hat{x}$ e $\hat{y}$

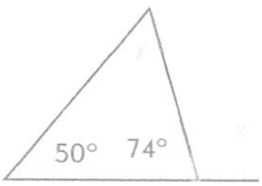
$x = 102 + 58$	$\hat{y} = 180 - 160$
$\hat{x} = 160°$	$\hat{y} = 20°$
x é ângulo externo	x e y são ângulos suplementares

Calcula $\hat{x}$ e $\hat{y}$.

a)

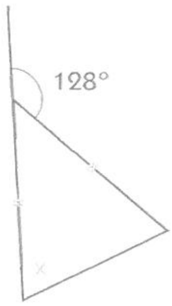


b)

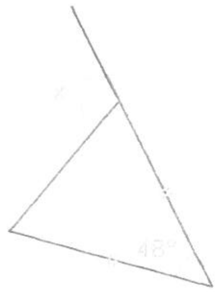


105

c)



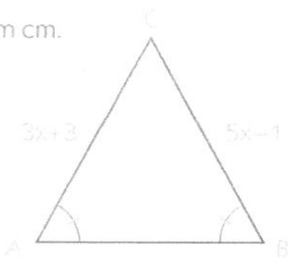
d)



32 • Observa atentamente a figura, onde as medidas estão em cm.

a) Calcula x.

b) Calcula $\overline{AC}$.



33 • Observa a figura.

33.1 Calcula:

a) $A\hat{C}B$;

b) $A\hat{B}C$;

c) $C\hat{A}B$;

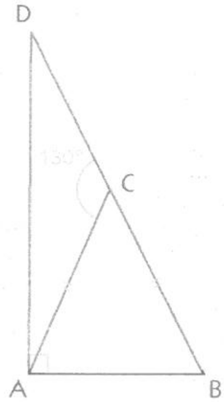
d) $A\hat{D}C$;

e) $C\hat{A}D$.

33.2 Classifica o Δ [DCA] quanto aos lados.

33.3 Qual é o maior lado do Δ [DCA]?

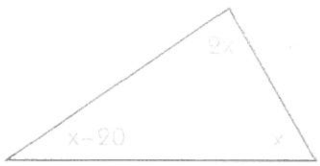
33.4 Qual é o menor lado do Δ [ABC]?



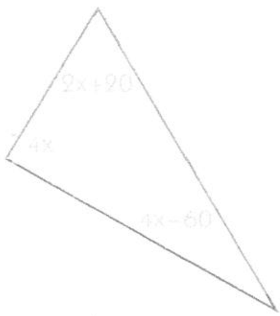
34 • 34.1 Calcula o valor de x e a amplitude de cada ângulo nos triângulos.

34.2 Classifica cada um dos triângulos anteriores quanto aos ângulos.

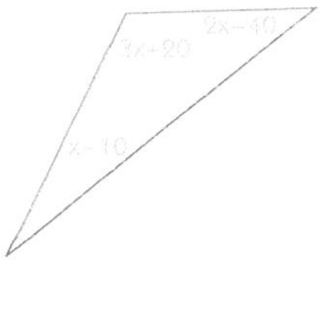
a)



c)



b)

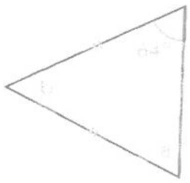


d)

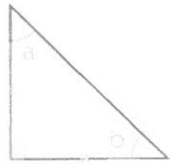
106

35 • Calcula a amplitude dos ângulos desconhecidos em cada triângulo.

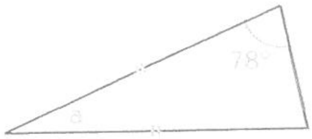
a)



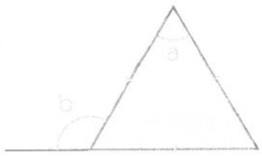
c)



b)

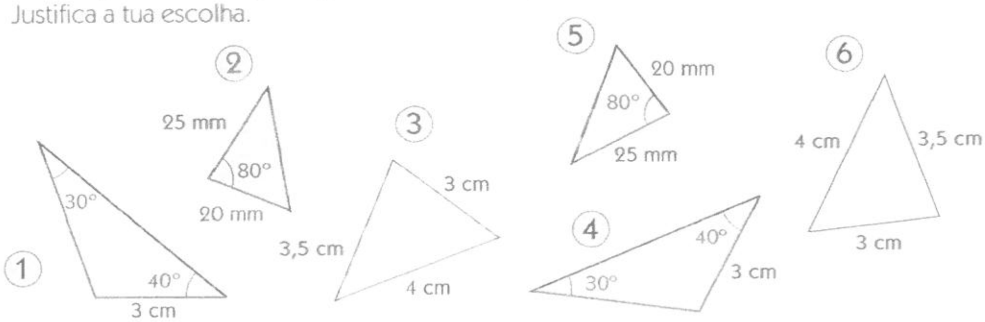


d)



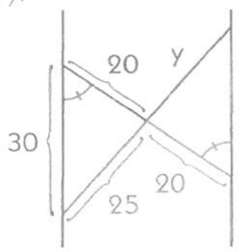
36 • Num triângulo [ABC], $C\hat{A}B = 3\,A\hat{B}C$ e $C\hat{A}B + A\hat{B}C = 120°$
Determina a amplitude de cada um dos ângulos do triângulo.

37 • Escolhe pares de triângulos geometricamente iguais.
Justifica a tua escolha.

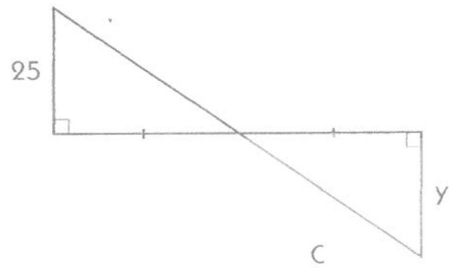


38 • Em cada caso há um par de triângulos geometricamente iguais (unidades em mm). Justifica.
Calcula *y*.

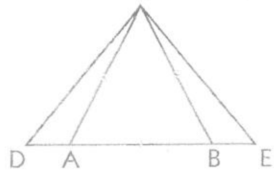
a)



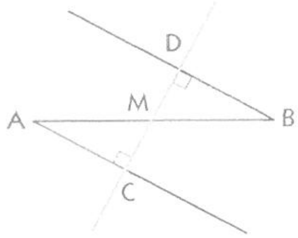
b)



39 • É dado um triângulo [ABC] isósceles. Desenha-o no teu caderno.
Prolonga [AB] nos dois sentidos tal que $\overline{AD} = \overline{BE}$.
Une C com D e com E.
Prova que os triângulos [CBE] e [CDA] são geometricamente iguais.

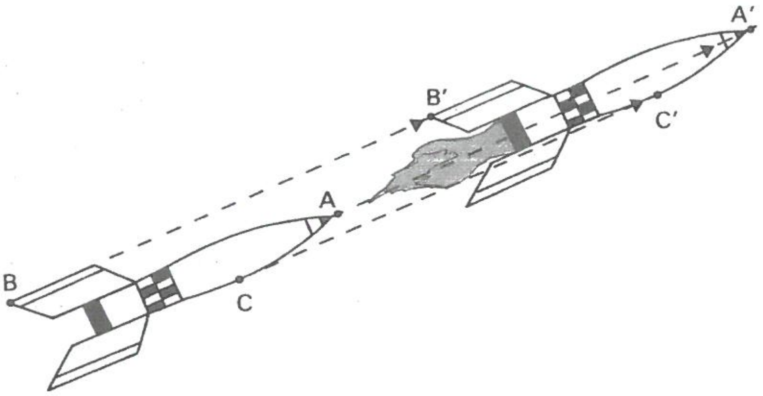


40 • Observa a figura, em que M é o ponto médio de [AB].
Prova que Δ [ACM] é geometricamente igual ao triângulo [MDB].



5.2 TRANSLAÇÕES

VECTORES



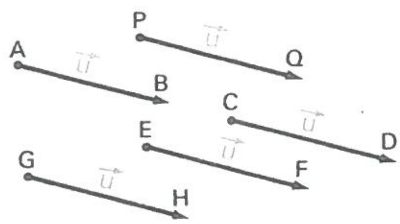
Imagina o movimento de um foguetão, em que todos os seus *pontos* se desloquem apenas ao longo de linhas paralelas. O foguetão teria realizado um *movimento de translação.*

Esquematicamente, podemos dizer (ver figura anterior):

- o ponto A descreveu o segmento orientado [A, A'];
- o ponto B descreveu [B, B'];
- o ponto C descreveu [C, C'];

Ora, os segmentos orientados [A, A'], [B, B'] e [C, C'] têm todos o *mesmo comprimento*, a *mesma direcção* e o *mesmo sentido*. Pelo facto de terem estas três características comuns, diremos que são segmentos orientados **equipolentes.**

Dado um segmento orientado (por exemplo, [P, Q]) podes traçar muitos segmentos orientados equipolentes a [P, Q] — tantos quantos quiseres! De todos eles diremos que representam o mesmo **vector**.



Esse vector pode designar-se por $\overrightarrow{PQ}$ ou por $\overrightarrow{AB}$ ou por $\overrightarrow{CD}$, etc. Muitas vezes utiliza-se apenas uma letra minúscula (com uma seta) — por exemplo $\vec{u}$. Pode então escrever-se $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \ldots$

Repara que, na figura, estão representados 5 segmentos orientados. Eles têm três características comuns (comprimento, direcção e sentido), distinguindo-se uns dos outros porque têm diferentes origens: [P, Q] tem origem em P, [A, B] tem origem em A, etc.

Porém, na figura apenas um vector está representado, pois um **vector** é caracterizado por:

um comprimento
uma direcção
um sentido

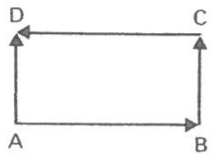
Se um vector é representado por um segmento (orientado), então esse mesmo vector pode ser representado por qualquer outro segmento orientado, *desde que seja equipolente ao primeiro.*

Dissemos já que um ponto podia considerar-se um **segmento nulo** — por exemplo, [PP].
Este segmento tem direcção *indeterminada* e, se o considerarmos um segmento orientado, o seu sentido é também *indeterminado*.
Podemos ainda considerar que qualquer segmento orientado nulo representa o *vector nulo*, geralmente designado por $\vec{O}$.
Assim: $\vec{O} = \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \ldots$

ACTIVIDADES

Na figura, [ABCD] é um rectângulo. De entre os segmentos orientados [A, B], [B, C], [C, D] e [A, D], indica:

- dois que sejam equipolentes;
- dois que, embora tendo a mesma direcção e o mesmo comprimento, não sejam equipolentes;
- dois que não tenham a mesma direcção.



Os quatro segmentos orientados considerados na actividade anterior, [A, B], [B, C], [C, D] e [A, D], quantos vectores diferentes representam? Porquê?

Considera agora um segmento de recta qualquer [PQ] à tua escolha. És capaz de explicar a diferença entre os símbolos [PQ], [P,Q] e $\overrightarrow{PQ}$?

109

E esta correspondência é unívoca, visto que a cada elemento do conjunto de partida (que é um conjunto de pontos), corresponde um e um só ponto (a sua imagem). Trata-se então de uma aplicação, a que damos o nome de **translação** — nome sugerido pelo *movimento de translação*, embora, evidentemente, a *aplicação* não seja um movimento.

No caso do nosso exemplo, seria a **translação definida pelo vector $\vec{u}$** ou **associada ao vector $\vec{u}$**.

> Uma **translação do plano definida pelo vector $\vec{u}$** ($T_{\vec{u}}$) é a aplicação em que o transformado de cada ponto é a sua soma com $\vec{u}$.

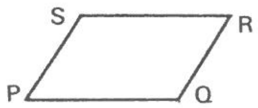
E escrevemos $X \xrightarrow[T_{\vec{u}}]{} Y$ (visto que $X + \vec{u} = Y$) ou $T_{\vec{u}}(X) = Y$

Agora, não é difícil determinar a imagem de um ponto qualquer por meio de uma translação desde que, evidentemente, seja indicado o vector associado à translação.

ACTIVIDADES

- No teu caderno ou numa folha de papel considera um ponto (P) e um vector ($\vec{v}$). Determina a soma de P com $\vec{v}$.

- Sendo [PQRS] um paralelogramo, completa



  $P + \vec{PQ} = \ldots\ldots$

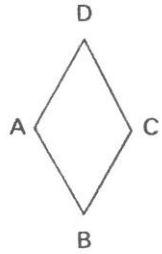
  $S + \vec{RQ} = \ldots\ldots$ (repara que $\vec{RQ} = \vec{SP}$)

  $Q + \ldots\ldots = R$

  $\ldots\ldots + \vec{RS} = P$

- Sendo A um ponto qualquer e $\vec{O}$ o vector nulo, completa: $A + \vec{O} = \ldots\ldots$ (que concluis?)

- Observa o losango [ABCD].



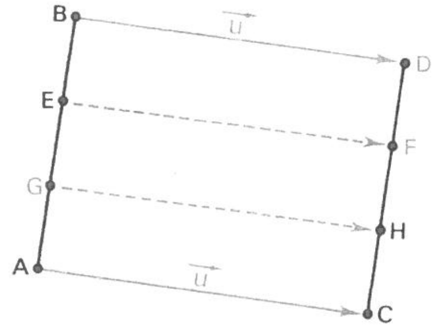
  Completa:

  - $T_{\vec{AB}}(A) = \ldots\ldots$
  - $T_{\vec{BA}}(C) = \ldots\ldots$
  - $T_{\vec{CB}}(\ldots\ldots) = A$
  - O vector associado à translação que transforma B em C e A em D é ....

- Qual será a imagem de uma figura qualquer por meio de uma translação associada ao vector nulo? Porquê?

111

PROPRIEDADES DAS TRANSLAÇÕES



• Consideremos um segmento [AB] e um vector $\vec{u}$. Se determinarmos as imagens de A e de B, por meio de $T_{\vec{u}}$, obteremos respectivamente os pontos C e D. Ora bem: poder-se-á afirmar que a translação transforma o segmento [AB] no segmento [CD]?

Para isso, há que saber se:

- qualquer ponto pertencente a [AB] tem por imagem um ponto de [CD], *o que de facto se verifica.* Por exemplo: $T_{\vec{u}}(E) = F$;
- qualquer ponto pertencente a [CD] é a imagem de um ponto de [AB], *o que também é verdade.* Por exemplo: $H = T_{\vec{u}}(G)$.

Podemos então afirmar que $[AB] \underset{T_{\vec{u}}}{\longrightarrow} [CD]$.

E pode verificar-se que estes dois segmentos são geometricamente iguais e paralelos, o que nos leva a concluir que **a translação conserva o comprimento e a direcção.**

Se, além disso, *orientarmos* o segmento [AB] de A para B e se considerarmos que o ponto C (imagem de A) é a origem de [C, D], podemos dizer que a translação transforma o segmento orientado [A, B] no segmento orientado [C, D]. Então **a translação conserva o sentido.**

Podemos resumir estas conclusões dizendo que:

Numa translação, a imagem de um segmento orientado é um segmento orientado equipolente.

ACTIVIDADES

Traça uma recta orientada (*r*), uma semi-recta ($\dot{O}P$) e um vector ($\vec{v}$) e procura resolver o problema da determinação das imagens de *r* e de $\dot{O}P$ por meio de $T_{\vec{v}}$.

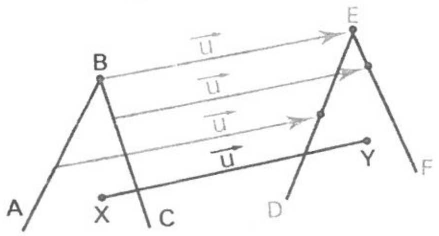
Verifica se as construções que fizeste estão de acordo com as seguintes proposições verdadeiras:

- **Uma translação transforma uma semi-recta numa semi-recta directamente paralela.**
- **Uma translação transforma uma recta orientada numa recta directamente paralela.**

(112)

- Vejamos agora qual é, numa translação, a imagem de um ângulo. Na translação definida pelo vector $\vec{u}$ (ver figura):

- a imagem da semi-recta $\dot{B}C$ é a semi-recta $\dot{E}F$;
- a imagem de B é E;
- a imagem da semi-recta $\dot{B}A$ é a semi-recta $\dot{E}D$.



Verifica-se que $T_{\vec{u}}$ transforma qualquer ponto do $\measuredangle ABC$ num ponto do $\measuredangle DEF$ (por exemplo, $T_{\vec{u}}(X) = Y$), e, inversamente, que um ponto pertencente ao $\measuredangle DEF$ é sempre a imagem de um ponto do $\measuredangle ABC$.

Nas condições apresentadas, podemos desde logo assegurar que $\dot{B}C$ e $\dot{E}F$ são directamente paralelas, assim como $\dot{B}A$ e $\dot{E}D$.

Então $\measuredangle ABC \xrightarrow[T_{\vec{u}}]{} \measuredangle DEF$

E pode verificar-se que estes dois ângulos são geometricamente iguais, o que nos leva a concluir que

- **a translação conserva a amplitude**

Ou, dizendo de outra maneira:

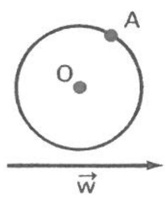
Numa translação, a imagem de um ângulo é um ângulo geometricamente igual.

As propriedades anteriores permitem-nos agora determinar imagens de figuras geométricas por meio de translações.

ACTIVIDADES

Determina a imagem de um losango [MNOP] na translação associada ao vector $\vec{PN}$, sendo P e N dois vértices consecutivos.

Constrói o transformado da *circunferência* em $T_{\vec{w}}$.



Sugestão: começa por determinar a imagem do centro O e de um ponto qualquer A; depois, pensa...

113

ADIÇÃO DE VECTORES

Observa a figura. Trata-se de um mapa onde estão indicadas (pelas suas iniciais) quatro cidades — Porto, Lisboa, Faro e Madrid — e onde pretendemos assinalar algumas das carreiras aéreas entre elas.

Para assinalar, por exemplo, que um avião sai de Madrid e chega a Lisboa, consideramos o vector $\overrightarrow{ML}$.

Supõe que um indivíduo se encontra em Madrid e pretende ir para Faro. Se não houver um voo directo $\overrightarrow{MF}$, o indivíduo poderá optar (se os horários o permitirem) por fazer escala em Lisboa, isto é, utilizar um voo de Madrid para Lisboa ($\overrightarrow{ML}$), seguido de outro de Lisboa para Faro ($\overrightarrow{LF}$).

Relativamente à mesma situação, pensa no que significam por exemplo as somas

$\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MP}$

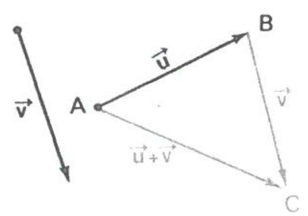
$\overrightarrow{PL} + \overrightarrow{LF}$

Em linguagem apropriada, dizemos que o vector $\overrightarrow{MF}$ é a **soma dos vectores** $\overrightarrow{ML}$ e $\overrightarrow{LF}$. E escrevemos

$$\overrightarrow{ML} + \overrightarrow{LF} = \overrightarrow{MF}$$

Mas — poderás observar... — nos exemplos anteriores, somámos dois vectores na situação especial em que a extremidade do 1.º é a origem do 2.º. E como deve proceder-se para somar dois vectores quaisquer?

Afinal, basta que te lembres que dois segmentos orientados equipolentes representam o mesmo vector! Assim, dados dois vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, para obtermos o **vector-soma** $\vec{u} + \vec{v}$, basta que representemos o vector $\vec{v}$ por um segmento orientado com origem na extremidade de $\vec{u}$.



114

Vamos agora verificar as **propriedades da adição de vectores:**

• A adição de vectores goza da propriedade **associativa**, isto é, dados três vectores quaisquer $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, tem-se sempre

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

• **Existe um elemento neutro** da adição de vectores — é o **vector nulo.** De facto, sendo $\vec{u}$ um vector qualquer tem-se

$$\vec{u} + \vec{O} = \vec{O} + \vec{u} = \vec{u}$$

• **Existe um simétrico para cada vector.** Qualquer que seja o vector $\vec{u}$ considerado, existe um único vector $-\vec{u}$, tal que:

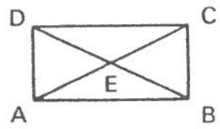
$$\vec{u} + (-\vec{u}) = -\vec{u} + \vec{u} = \vec{O}$$

• A adição de vectores é **comutativa** isto é, para quaisquer dois vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, verifica-se sempre

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

ACTIVIDADES

[ABCD] é um rectângulo. Completa:



- $\vec{BC} + \vec{CD} =$ ......
- $\vec{DB} + \vec{BA} =$ ......
- $\vec{DC} + \vec{DA} =$ ...... (repara que $\vec{DA} = \vec{CB}$).
- $\vec{CE} + \vec{DE} =$ ......

Relativamente à mesma figura, completa:

- $\vec{BE} + \vec{ED} =$ ...... ■ $\vec{EC} + \vec{CA} =$ ...... ■ $\vec{BD} + \vec{DE} =$ ...... ■ $\vec{DA} + \vec{BC} =$ ......

No teu caderno ou numa folha de papel, considera vectores à tua escolha e verifica as propriedades associativa e comutativa da adição de vectores.

Grande parte das actividades que temos vindo a realizar com vectores e translações pode ser estudada de uma forma experimental com a ajuda de um computador.
O programa LOGO.GEOMETRIA é adequado para esse estudo experimental de muitas das questões relativas a este capítulo de Transformações Geométricas (translações, rotações, simetrias, etc.).
Por isso, se dispuseres de um computador na tua escola, e de apoio para o uso do programa referido, isso poderá ajudar-te em quase toda a Geometria do 7.º ano. Também o trabalho com a linguagem LOGO poderá ser muito útil para esse efeito.

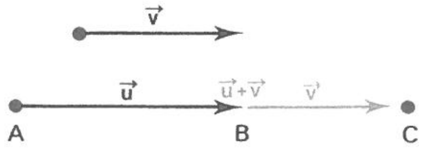
Então, se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, a soma de $\vec{u}$ com $\vec{v}$ é o vector

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$$

Vejamos agora o que sucede quando os vectores têm a mesma direcção:

Se os vectores têm o mesmo sentido, o vector soma tem:

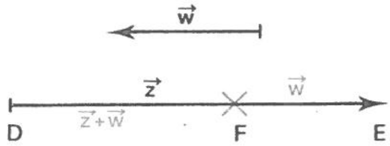
- a mesma direcção que os dois vectores dados;
- o mesmo sentido;
- o comprimento igual à soma dos seus comprimentos.



$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$; $\vec{u} + \vec{v} = \mathbf{\overrightarrow{AC}}$

Se os vectores têm sentidos opostos (e comprimentos diferentes), o vector soma tem:

- a direcção dos dois vectores dados;
- o sentido daquele que tiver maior comprimento;
- o comprimento igual à diferença dos seus comprimentos.



$\vec{z} = \overrightarrow{DE}$, $\vec{w} = \overrightarrow{EF}$; $\vec{z} + \vec{w} = \mathbf{\overrightarrow{DF}}$

E se os vectores tiverem sentidos opostos e igual comprimento?

Voltando ao nosso mapa, imagina o que seria o *resultado* de um voo Lisboa-Madrid, imediatamente seguido de um voo Madrid-Lisboa... A soma dos vectores $\overrightarrow{LM}$ e $\overrightarrow{ML}$ é $\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{ML} = \overrightarrow{LL}$ que, como sabes, é o vector nulo ($\vec{O}$). Dizemos então que $\overrightarrow{ML}$ é o **vector simétrico** de LM (recorda que, relativamente à adição de números racionais, dizemos que dois números são simétricos quando a sua soma é zero...). E escrevemos $\overrightarrow{ML} = -\overrightarrow{LM}$ ou, pela mesma razão, $\overrightarrow{LM} = -\overrightarrow{ML}$.

Concluindo: dois vectores dizem-se **simétricos** quando a sua soma é o vector nulo — o que acontece se eles têm a mesma direcção, o mesmo comprimento e sentidos opostos.

COMPOSIÇÃO DE TRANSLAÇÕES

Observa a figura seguinte, onde consideramos duas translações:

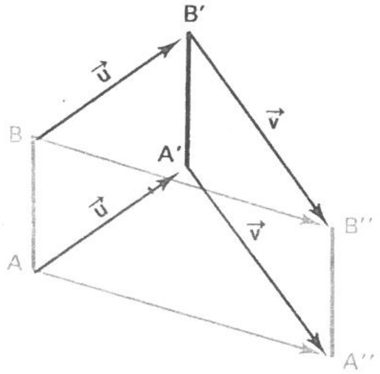
- $T_{\vec{u}}$ — que transforma o segmento [AB] em [A'B']
- $T_{\vec{v}}$ — em que [A'B'] é transformado em [A''B''].

Esquematicamente:

$$\textbf{[AB]} \xrightarrow[T_{\vec{u}}]{} [A'B'] \xrightarrow[T_{\vec{v}}]{} \textbf{[A''B'']}$$

Repara que — sendo [A'B'], ao mesmo tempo, a *imagem* na 1.ª translação ($T_{\vec{u}}$) e o *original* na 2.ª translação ($T_{\vec{v}}$) — podemos afinal considerar uma terceira aplicação:

$$\textbf{[AB]} \longrightarrow \textbf{[A''B'']}$$



Nesta aplicação, o domínio é o conjunto dos pontos do segmento [AB] e o contradomínio é o conjunto dos pontos de [A''B'']. Vejamos como se obtiveram as imagens de A e de B:

$$A \xrightarrow[+\vec{u}]{} A' \xrightarrow[+\vec{v}]{} A'' \qquad B \xrightarrow[+\vec{u}]{} B' \xrightarrow[+\vec{v}]{} B''$$

A esta aplicação (indicada a vermelho) damos o nome de

composta de $T_{\vec{v}}$ com $T_{\vec{u}}$

e, simbolicamente, escreve-se

$$T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$$

Repara na ordem por que indicamos as duas translações: deve ler-se $T_{\vec{v}}$ *após* $T_{\vec{u}}$ ou $T_{\vec{u}}$ *seguida de* $T_{\vec{v}}$. O símbolo $\circ$ indica a operação *composição* realizada com as duas translações.

117

Será que esta aplicação $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$ é também uma translação? Observando com atenção a figura, és certamente levado a concluir que:

- $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$ é, de facto, uma translação — repara que $\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{BB''}$.
- O vector associado a esta translação é o vector soma $\vec{u} + \vec{v}$.

Esta operação de que temos vindo a falar — **composição** — não se realiza apenas com translações, mas também com outras aplicações (numéricas ou não). No fim do livro, em apêndice, dedica-se uma secção a este assunto.

Sendo assim, $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u} + \vec{v}}$

isto é, o **resultado da composição de duas translações é ainda uma translação, e o vector que a define é a soma dos vectores associados àquelas duas translações.**

Pode, pois, afirmar-se que à *composição de translações* corresponde a *adição* de vectores.

Em virtude desta correspondência, as propriedades da composição de translações são as mesmas que enunciámos para a adição de vectores:

- Associativa. Para quaisquer três translações, $T_{\vec{u}}$, $T_{\vec{v}}$ e $T_{\vec{w}}$, verifica-se

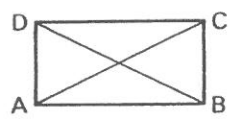
$$(T_{\vec{w}} \circ T_{\vec{v}}) \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{w}} \circ (T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}})$$

- Elemento neutro. É a translação associada ao vector nulo.
- Para cada translação ($T_{\vec{u}}$) existe outra que é a aplicação inversa. É a translação definida pelo vector simétrico de $\vec{u}$ (isto é, $T_{-\vec{u}}$).
- Comutativa. Para quaisquer das translações, $T_{\vec{u}}$ e $T_{\vec{v}}$, verifica-se:

$$T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}}$$

ACTIVIDADES

Considera o rectângulo [ABCD]



■ Completa:

$T_{\overrightarrow{AB}}(A) = \ldots\ldots$ $\quad$ $T_{\overrightarrow{BC}}(B) = \ldots\ldots$

logo $(T_{\overrightarrow{BC}} \circ T_{\overrightarrow{AB}})(A) = \ldots\ldots$

Ora $T_{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}(A) = T \ldots\ldots (A) = \ldots\ldots$

■ Completa:

$(T_{\overrightarrow{DB}} \circ T_{\overrightarrow{CD}})(C) = \ldots\ldots$

O vector que define a translação composta $T_{\overrightarrow{DB}} \circ T_{\overrightarrow{CD}}$ é......

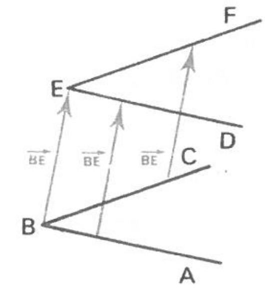
Considera um triângulo [PQR] e dois vectores, $\vec{a}$ e $\vec{b}$.
Constrói a imagem do triângulo pela translação composta $T_{\vec{b}} \circ T_{\vec{a}}$.
És capaz de indicar dois processos diferentes de o fazer?

118

APLICAÇÃO DO ESTUDO DAS TRANSLAÇÕES

O estudo feito sobre translações vai permitir-nos demonstrar que são verdadeiras algumas importantes proposições da geometria que têm aplicação em muitos problemas. Apresentaremos, em seguida, cinco dessas proposições:

- Consideremos dois ângulos com os lados directamente paralelos — o ∢ ABC e o ∢ DEF:



- $\dot{B}A$ é directamente paralelo a $\dot{E}D$
- $\dot{B}C$ é directamente paralelo a $\dot{E}F$

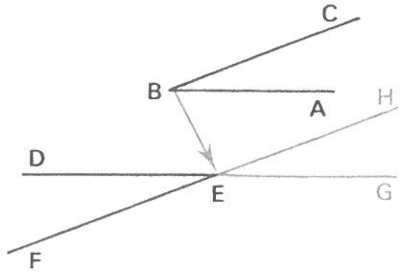
Que relação de grandeza existirá entre as amplitudes destes dois ângulos? Repara que, se considerarmos a translação associada ao vector $\overrightarrow{BE}$, o ∢ ABC é transformado no ∢ DEF. Simbolicamente:

$$∢\, ABC \xrightarrow[T_{\overrightarrow{BE}}]{} ∢\, DEF$$

Mas (como sabes) a imagem de um ângulo, numa translação, é um outro ângulo geometricamente igual. No nosso caso, ∢ ABC ≃ ∢ DEF (ou $A\hat{B}C = D\hat{E}F$).

Dois ângulos com os lados directamente paralelos, cada um a cada um, são iguais.

- Vejamos agora o caso de dois ângulos com os lados inversamente paralelos:



- $\dot{B}A$ é inversamente paralelo a $\dot{E}D$
- $\dot{B}C$ é inversamente paralelo a $\dot{E}F$

Prolongando, no sentido opósto, os lados do ângulo DEF, obtemos o ângulo GEH (observa a figura).

119

Os ângulos ABC e GEH têm os lados directamente paralelos, cada um a cada um. Então, de acordo com a proposição anterior, ∡ ABC ≃ ∡ GEH.

Mas, por outro lado, também sabemos que ∡ GEH ≃ ∡ DEF, visto que são ângulos verticalmente opostos.

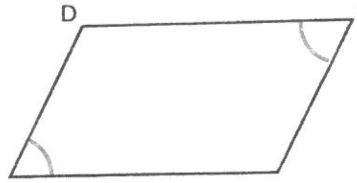
Então, se os ângulos ABC e DEF são ambos iguais ao ângulo GEH, são iguais entre si.

Dois ângulos com os lados inversamente paralelos, cada um a cada um, são iguais.

- O quadrilátero [ABCD] é um paralelogramo.

Os ângulos DAB e BCD são opostos. Repara que esses dois ângulos têm os lados inversamente paralelos cada um a cada um:

- $\dot{A}B$ é inversamente paralelo a $\dot{C}D$
- $\dot{A}D$ é inversamente paralelo a $\dot{C}B$

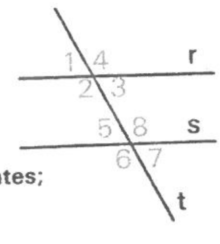


Da proposição anterior conclui-se que ∡ DAB ≃ ∡ BCD. E o mesmo pode dizer-se dos ângulos CBA e ADC.

Os ângulos opostos de um paralelogramo são iguais.

ACTIVIDADES

Na figura, as rectas *r* e *s* são intersectadas pela recta *t* (secante). Numerámos, de 1 a 8, os ângulos determinados por essas rectas. Recordemos os nomes que é costume dar-lhes:



- **1 e 5** (ou 2 e 6, 4 e 8, 3 e 7) — ângulos **correspondentes;**
- **3 e 5** (ou 2 e 8) — **alternos internos;**
- **1 e 7** (ou 4 e 6) — **alternos externos;**
- **2 e 5** (ou 3 e 8) — **internos do mesmo lado da secante;**
- **1 e 6** (ou 4 e 7) — **externos do mesmo lado da secante.**

Pois bem: *sendo as rectas r e s* paralelas, então

a) Ângulos correspondentes são iguais;

b) Ângulos alternos internos são iguais;

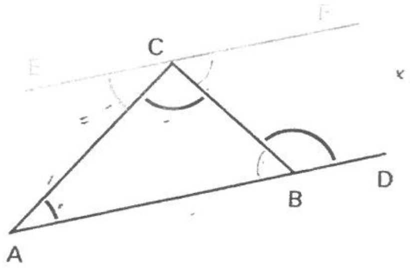
c) Ângulos alternos externos são iguais;

d) Ângulos internos (ou externos) do mesmo lado da secante são suplementares.

Com base nas duas primeiras proposições do texto, justifica *a*), *b*), *c*) e *d*).

120

• Observa a figura. Nela está representado um triângulo [ABC]; prolongando o lado [AB], podemos falar do ângulo DBC. Ora bem: a este ângulo — *determinado por um dos lados do triângulo e pelo prolongamento de outro* — damos o nome de **ângulo externo do triângulo.**



Comecemos por considerar uma recta EF, passando por C, paralela a AB. Verifica-se que:

- ∢ DBC e ∢ ECB são alternos internos, logo $D\hat{B}C = E\hat{C}B$
- a semi-recta $\dot{C}A$ divide o ∢ ECB em dois, donde $D\hat{B}C = E\hat{C}A + A\hat{C}B$
- ∢ ECA e ∢ BAC são também alternos internos, portanto $E\hat{C}A = B\hat{A}C$

Finalmente

$$\boxed{\mathbf{D\hat{B}C = B\hat{A}C + A\hat{C}B}}$$

Como deveremos enunciar esta propriedade? Repara que, dos três ângulos internos do triângulo, um deles (o ângulo CBA) é *adjacente* ao ângulo externo DBC; os outros dois (BAC e ACB) são *não adjacentes.*

Um ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos internos não adjacentes.

- Observa ainda a mesma figura. Repara que:
- os ângulos ECA e BAC são iguais (como já foi verificado anteriormente);
- os ângulos BCF e CBA são iguais, pois, tal como os anteriores, são alternos internos relativamente a duas rectas paralelas cortadas por uma secante.

Então ∢ ECA + ∢ ACB + ∢ BCF = ∢ BAC + ∢ ACB + ∢ CBA

E como ∢ ECA + ∢ ACB + ∢ BCF é um ângulo raso, também

$$\boxed{\text{∢ BAC + ∢ ACB + ∢ CBA é um ângulo raso}}$$

A soma dos ângulos internos de um triângulo é um ângulo raso. 180°

121

Verificação de Conhecimentos 5.2

OBJECTIVOS — Procurando resolver os exercícios que se seguem, verifica se já és capaz de:

- determinar a imagem de um ponto (e de uma figura), numa dada translação;
- conhecer e aplicar à resolução de problemas as propriedades das translações;
- determinar a soma de dois vectores dados e a imagem de um ponto (e de um segmento) pela composta de duas translações;
- resolver problemas com base nas proposições estudadas como aplicação das translações.

Papel e Lápis

1.

a) Desenha o triângulo [ABC] e, em seguida, constrói a sua imagem em $T_{\overrightarrow{CB}}$.

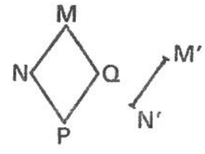
b) Indica o vector associado à translação inversa daquela translação.

c) Completa: $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = ...$

$\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} = ...$

2. Considera um segmento [AB] e um ponto C (não pertencente ao segmento). Determina a imagem de [AB] na translação que transforma A em C.

3. [MNPQ] é um losango e sabe-se que [M'N'] é o transformado do lado [MN] numa certa translação.

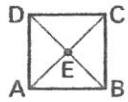


a) Podemos assegurar que [MN] e [M'N'] são paralelos e, além disso, têm o mesmo comprimento. Procura justificar esta afirmação.

b) Indica o vector que define a translação referida.

c) Sem desenhares uma única vez esse vector, procura construir a imagem do losango [MNPQ] na translação.

4. A figura representa um quadrado [ABCD], com as suas diagonais. Procura completar:



a) $C + \overrightarrow{DA} = ...$

b) $T_{\overrightarrow{DC}}(A) = ...$

c) $T_{\overrightarrow{ED}}(B) = ...$

d) $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} = ...$

e) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA} = ...$

f) $T_{\overrightarrow{BC}}([AB]) = ...$

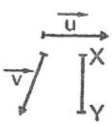
g) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = ...$

h) $\overrightarrow{DC} + (-\overrightarrow{BC}) = ...$

i) $T_{\overrightarrow{EC}} \circ T_{\overrightarrow{BE}}(B) = ...$

j) $T_{\overrightarrow{DA}} \circ T_{\overrightarrow{BC}}(A) = ...$

5. Considera um segmento [XY] e dois vectores, $\vec{u}$ e $\vec{v}$.



a) Determina $T_{\vec{u}}$ [XY].

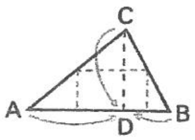
b) Determina a imagem de [XY] na translação composta $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$.

c) Qual é o vector associado a esta translação $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$?

Cópia 123

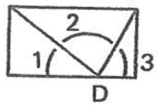
6. Considera uma recta r e um vector $\vec{w}$ com a direcção de r. Qual é a imagem de r, na translação $T_{\vec{w}}$?

7. Sugestão de trabalho para uma *confirmação experimental* de uma das proposições estudadas:



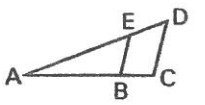
Constrói, em cartolina, um triângulo [ABC]. Traça a altura relativa ao lado [AB]. Designa por D o ponto em que essa altura intersecta [AB].

Dobra o triângulo de forma que os vértices A, B e C coincidam todos com o ponto D.



Repara que $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3$ é um ângulo raso.
Que pode concluir-se?

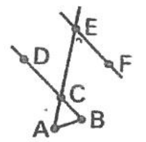
8. Na figura, [BE] e [CD] são paralelas.



a) Os ângulos DCA e EBA são iguais. Porquê?

b) Sabendo que $C\hat{B}E = 85°$ e que $A\hat{E}B = 70°$, determina a amplitude do $\sphericalangle$ EAB (Sugestão: repara que o $\sphericalangle$ CBE é um ângulo externo do triângulo [ABE]...)

9. Observa a figura. As rectas DB e EF são paralelas.



a) Os ângulos ECD e CEF são iguais. Justifica.

b) Como se chamam os ângulos ECD e ACB quanto à sua posição relativa? Que relação de grandeza existe entre as suas amplitudes?

c) Determina a amplitude do $\sphericalangle$ BAC, sabendo que $E\hat{C}D = 50°$ e que os ângulos internos do $\triangle$ [ABC], com vértices em A e B, são iguais.

10. Sendo a amplitude de um dos ângulos internos de um triângulo igual a 60°, determina a amplitude dos dois restantes, sabendo que um deles é o dobro do outro.

11. Num paralelogramo, um dos ângulos internos tem 40° de amplitude. Calcula a amplitude de cada um dos outros ângulos internos.

12. Num triângulo [ABC], um dos ângulos externos em A tem uma amplitude 5 vezes maior que a do ângulo interno adjacente. Dos outros dois ângulos internos, sabe-se que $\hat{B} = \hat{C}$. Determina:

a) A amplitude de cada um dos ângulos internos do $\triangle$ [ABC].

b) A amplitude de um dos ângulos externos com vértice em C.

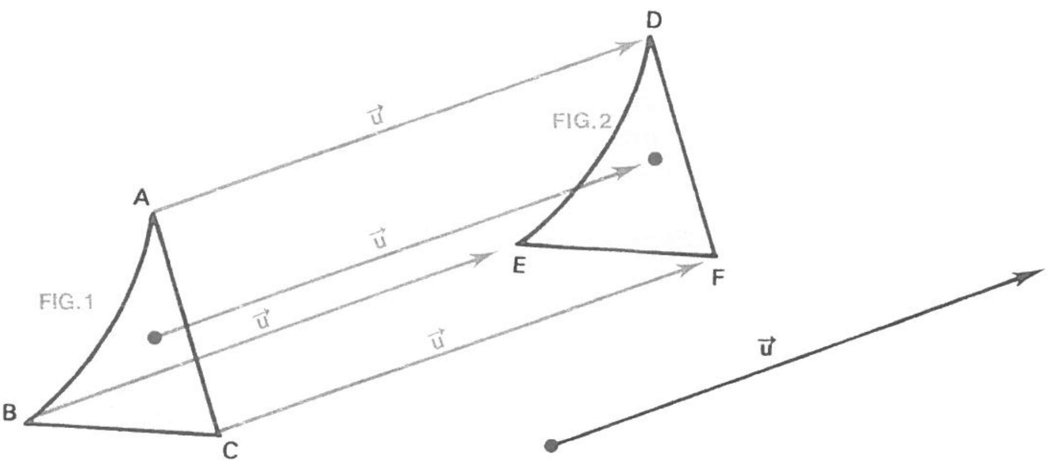
13. Procura relacionar, quanto à amplitude, dois ângulos (ABC e DEF) que tenham, de um para o outro:

- um lado do $\sphericalangle$ ABC directamente paralelo a um lado do $\sphericalangle$ DEF;
- um lado do $\sphericalangle$ ABC inversamente paralelo a um lado do $\sphericalangle$ DEF.

Que concluis?

123

DEFINIÇÃO DE TRANSLAÇÃO



Suponhamos que nos são dados a Fig. 1 e o vector $\vec{u}$. Se considerarmos o vector $\vec{u}$ aplicado em diversos pontos da Fig. 1 (A, B, C,...), obteremos, como extremidades dos segmentos orientados, outros tantos pontos (respectivamente: D, E, F,...).

Diremos então que a soma do ponto A com o vector $\vec{u}$ é o ponto D, pelo facto de ser $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$.

E escrevemos $A + \vec{u} = D$

Analogamente, $B + \vec{u} = E$ e $C + \vec{u} = F$

De um modo geral:

> A **soma de um ponto X com um vector $\vec{u}$** é um ponto Y tal que $\overrightarrow{XY} = \vec{u}$, e escreve-se então $\mathbf{X + \vec{u} = Y}$.

Repara que, pelo processo utilizado, estabelecemos uma correspondência: a cada ponto da Fig. 1 corresponde um outro ponto (a sua soma com o vector $\vec{u}$). Isto é

$$A \xrightarrow[+\vec{u}]{} D \qquad B \xrightarrow[+\vec{u}]{} E \qquad C \xrightarrow[+\vec{u}]{} F$$

110